数式処理 *J.JSSAC (1999)*
Vol. 7, No. 3, pp. 2 - 10

論文

$\mathcal{D}$-加群を用いた留数値計算アルゴリズムの局所化

田島 慎一　　中村 弥生

新潟大学工学部　　お茶の水女子大学大学院

(Received 1999/4/5)

我々は, Risa Consortium 第 6 回研究集会 (1998 年) において $\mathcal{D}$-加群の理論に基づいた留数値計算のアルゴリズムを提出した. このアルゴリズムは, 代数的局所コホモロジーと正則微分形式との間に成り立つ $\mathcal{D}$-加群としての双対性を用いて導き出されたものであり, 基礎としている理論も導出過程も従来のものとは異なっている (文献 [6] 参照). 本稿では, そこで展開した理論を中国剰余定理と組合わせる事により局所化できることを示す. さらに留数値をより効率的に求めるアルゴリズムを与える. この方法により, 部分分数分解を直接求めることなく, 留数値を求める計算を局所化することができる.

1　記号と復習

$q(z)$ を $X = \mathbf{C}$ 上の多項式とする. $V = \{z \in \mathbf{C} \mid z = \alpha_j, j = 1, \ldots, \nu\}$ を $q(z)$ の零点の集合とし, $V_j = \{\alpha_j\}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ とおく. 有理関数 $u(z) = 1/q(z)$ の, 正則関数の層 $\mathcal{O}_X$ による剰余を m とおくと, これは V に台をもつ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[V]}(\mathcal{O}_X)$ の元とみなすことができる. また, 各 $j = 1, \ldots, \nu$ に対し, $\mathcal{H}^1_{[V_j]}(\mathcal{O}_X)$ の元 m_j で $m = m_1 + \cdots + m_\nu$ を満たすものが存在する. 代数的局所コホモロジー群が $\mathcal{D}_X$-加群であることから (文献 [3]), m を annihilate する微分作用素のなすイデアルをとり, これを $\mathcal{A}nn$ とおく. このとき, 次の命題により, 各 m_j は $\mathcal{A}nn$ を用いて特徴付けられることがわかる.

命題 1
$\{h \in H^1_{[V_j]}(\mathcal{O}_X) | Rh = 0, ^\forall R \in \mathcal{A}nn\} = \{cm_j | c \in \mathbf{C}\}$, $j = 1, \ldots, \nu$.

ここで, 次の微分作用素 P, Q を導入する.

$$P = \frac{q(z)}{\mathrm{GCD}(q(z), q'(z))}\frac{d}{dz} + \frac{q'(z)}{\mathrm{GCD}(q(z), q'(z))}, \tag{1}$$

$$Q = q(z). \tag{2}$$

P は多項式係数の一階常微分作用素である．Q は多項式 $q(z)$ を掛けるという作用を表す零階の微分作用素である．

P, Q の交換子は次を満たす．

$$PQ - QP = \frac{q'(z)}{\mathrm{GCD}(q(z), q'(z))} Q \tag{3}$$

微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ のイデアル $\mathcal{A}nn$ はこれら 2 つの微分作用素 P, Q により生成される．

定理 2
$\mathcal{A}nn = \langle P, Q \rangle$.

(文献 [5], [6] 参照)

正則微分形式 $\psi(z)dz \in \Omega_X$ に, $(\psi(z)m)dz \in \mathcal{H}^1_{[V_j]}(\Omega_X)$ の V_j における留数を対応させる次の線形写像を考える．

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Res}_{V_j}(\cdot, m): & \Omega_X & \to & \mathbf{C} \\ & \psi(z)dz & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{V_j} \psi(z)mdz \end{array} \tag{4}$$

$R \in \mathcal{D}_X$ の形式的随伴作用素を R^* とおき, 正則微分形式 $\phi dz \in \Omega_X$ に対する $R \in \mathcal{D}_X$ の右からの作用を $(\phi dz)R = (R^*\phi)dz$ で与えることにより, Ω_X は右 $\mathcal{D}_X$-加群となる．また, $\mathcal{A}nn$ の元に対する形式的随伴作用素全体は微分作用素環 $\mathcal{D}_X$ の右イデアルをなし, これは $\mathcal{A}nn$ の生成元 P, Q の形式的随伴作用素で生成される．このとき, $R \in \mathcal{A}nn$ に対し, 明らかに $\mathrm{Res}_{V_j}((R^*\phi)dz, m) = \mathrm{Res}_{V_j}(\phi dz, Rm) = 0$ が成り立ち, さらに, 次を得る．

定理 3

$$\begin{aligned} & \{\varphi(z)dz \in \Omega_X \mid \mathrm{Res}_{V_j}(\varphi(z)dz, m) = 0, j = 1, 2, \ldots, \nu\} \\ = \; & \{(R^*\phi(z))dz \mid R \in \mathcal{A}nn, \phi(z)dz \in \Omega_X\}. \end{aligned}$$

ここで示した正則微分形式に関する結果を用いることにより, $\mathbf{Q}$ 係数有理関数の留数値計算に関するアルゴリズムを得ることができる．詳しくは文献 [5],[6] を参照されたい．

2 有理関数に関する留数値計算アルゴリズムの局所化

$h(z)$, $q(z) \in \mathbf{Q}[z]$ は $\deg h(z) < \deg q(z)$ を満たし, 互いに共通因子を持たない有理数係数多項式であるとする．これに対し, 有理関数 $u(z) = h(z)/q(z)$ の留数値を計算する問題を考える．

有理関数の一位の極における留数値は比較的簡単に求めることができる．そこで, 与えられた有理関数を, 一位の極に関する部分と重複した位数を持つ極に関する部分とに分解する．次に, (1) で与えた微分作用素 P の形式的随伴作用素の作用が局所化できることを示す (命題 2)．これにより, 有理関数の注目した既約因子の零点における留数値を求めるアルゴリズムを導く．

2.1 極の位数による分解

多項式 $q(z)$ が $q(z) = q_s \cdot q_w$ と分解されたとする．ここで q_s は重複度 1 の因子, q_w は重複度 2 以上の因子とする．$\deg q_s = d_s$, $\deg q_w = d_w$ とおくと $h(z)$ と $q(z)$ は共通因子を持たないことから, $q_s \cdot h_w + q_w \cdot h_s = h$ を満たす多項式 h_w, h_s で $\deg h_w < d_w$, $\deg h_s < d_s$ を満たすものが一意に定まる．よって, 有理関数 $u(z) = h(z)/q(z)$ は, 次の形に書くことができる．

$$u(z) = \frac{h_s}{q_s} + \frac{h_w}{q_w}. \tag{5}$$

これにより, $u(z)$ は一位の極に関する部分 h_s/q_s と, 重複した位数を持つ極に関する部分 h_w/q_w とに分解され, 前者は次に述べる方法等により, 留数値を求めることができる．

注意 (一位の極における留数値の計算)

与えられた有理関数 $u(z)$ の一位の極 $z = \alpha$ に対して, $(dq/dz)(\alpha) \neq 0$ である．よって, α における留数値は $h(\alpha)/q'(\alpha)$ に等しい．つまり, 不定元 t を導入することにより, 一位の極における留数値は, イデアル $\langle q_s, h - q't\rangle \subset \mathbf{Q}[z,t]$ と変数 t に関する多項式環 $\mathbf{Q}[t]$ との共通部分 $\langle q_s, h - q't\rangle \cap \mathbf{Q}[t]$ の零点として与えられる．

2.2 局所化原理 (中国剰余定理と微分作用素)

次数が d である多項式 $q(z)$ に対して, $q(z)$ の生成する $\mathbf{Q}[z]$ のイデアルを $I = \langle q(z)\rangle$ とおくと, $\mathbf{Q}[z]/I$ は d 次元ベクトル空間とみなすことができる．以下, $\Omega_X/I\Omega_X$ と $\mathbf{Q}[z]/I$ を同一視する．P, Q は交換関係 (3) を満たすので, P の形式的随伴作用素 P^* は

$$QP^* - P^*Q = \frac{q'(z)}{\mathrm{GCD}(q(z), q'(z))}Q \tag{6}$$

を満たす.(ここで, $Q^* = Q$ を用いた.) 従って, P^* はベクトル空間 $\mathbf{Q}[z]/I$ に自然に作用する．つまり, $\varphi \in I$ に対して, $\varphi = q(z)\psi = Q\psi$ とおくと, (6) により,

$$\begin{aligned} P^*\varphi &= P^*Q\psi \\ &= QP^*\psi - \tfrac{q'(z)}{\mathrm{GCD}(q(z),q'(z))}Q\psi \\ &= Q(P^*\psi - \tfrac{q'(z)}{\mathrm{GCD}(q(z),q'(z))}\psi) \end{aligned}$$

となり, $\{P^*\varphi \mid \varphi \in I\} \subseteq I$ が成り立つ．これにより, 線形写像

$$P^* : \mathbf{Q}[z]/I \to \mathbf{Q}[z]/I$$

が定義される．(文献 [6] における留数値計算アルゴリズムはこの事実に基づいている.)

さて, $q(z)$ は $q(z) = q_1^{\mu_1} \cdots q_N^{\mu_N}$ と因数分解され, $q_k^{\mu_k}$ の生成するイデアルを I_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ とおくと, $I = I_1 \cap \cdots \cap I_N$ となる．このとき, 中国剰余定理により,

$$\mathbf{Q}[z]/I \cong \mathbf{Q}[z]/I_1 \times \cdots \times \mathbf{Q}[z]/I_N \tag{7}$$

なる同型が成立する．

$q = q(z)$ の一つの因子 q_ℓ に注目して議論をすすめる. q_ℓ の重複度を μ_ℓ とおく. I_ℓ を $q_\ell^{\mu_\ell}$ の生成する $\mathbf{Q}$ 係数多項式環のイデアル, Q_ℓ を $Q_\ell = q_\ell^{\mu_\ell}$ で与えられる 0 階の微分作用素とする. $q_{\mathrm{sqfr}} = q/\mathrm{GCD}(q, q')$ (q の無平方因子) とおき, (1) で与えた作用素 P と Q_ℓ との交換子をとると,

$$\begin{aligned} PQ_\ell - Q_\ell P &= q_{\mathrm{sqfr}} \mu_\ell q_\ell^{\mu_\ell - 1} q_\ell' \\ &= (\frac{q_{\mathrm{sqfr}}}{q_\ell} \mu_\ell q_\ell') Q_\ell \end{aligned}$$

となり, よって

$$Q_\ell P^* - P^* Q_\ell = Q_\ell (\frac{q_{\mathrm{sqfr}}}{q_\ell} \mu_\ell q_\ell')$$

が成り立つ. つまり, (1) で与えた微分作用素 P に対して, 次が言える.

命題 4

微分作用素 P の形式的随伴作用素 P^* は (7) に現れるベクトル空間 $\mathbf{Q}[z]/I_\ell$ に線形写像として自然に作用する, *i.e.*, $P^* : \mathbf{Q}[z]/I_\ell \to \mathbf{Q}[z]/I_\ell$.

ここで, $\deg q_\ell = d_\ell$ とおく. q_ℓ の零点の集合 A_ℓ は相異なる d_ℓ 個の点 $A_{\ell,1}, \ldots, A_{\ell,d_\ell}$ からなるとし, $A_{\ell,j} \in A_\ell$ に対し, 線形写像

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Res}_{A_{\ell,j}}(\cdot, m): & \mathit{\Omega}_X & \to & \mathbf{C} \\ & \psi(z)dz & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{A_{\ell,j}} \psi(z) m dz \end{array} \tag{8}$$

を考える. このとき, $K_\ell = \{\varphi(z)dz \in \mathit{\Omega}_X \mid \mathrm{Res}_{A_{\ell,j}}(\varphi(z)dz, m) = 0, \varphi(z) \in \mathbf{Q}[z]/I_\ell, \quad j = 1, \ldots, d_\ell\}$ に対し, 定理 2 を局所化した次の定理が成り立つ.

定理 5

$K_\ell = \{(P^*\phi(z))dz \mid \phi(z) \in \mathbf{Q}[z]/I_\ell\}$.

さらに, 多項式 $q_\ell^{\mu_\ell - 1}$ の生成するイデアルを $\tilde{I}_\ell$ とおくと, 次が成り立つ.

定理 6

$P^*\varphi(z) \in I_\ell \Leftrightarrow \varphi(z) \in \tilde{I}_\ell$

証明. q の次数別分解を $q = q_1^{\mu_1} \cdots q_N^{\mu_N}$ とおく. 随伴作用素 P^* は

$$P^* = -\prod_{j=1}^{N} q_j^{\mu_j} \frac{d}{dz} \frac{1}{\prod_{i=1}^{N} q_i^{\mu_i - 1}}$$

と表される. 微分作用素 P^* の関数 $\chi(z) q_\ell^{\mu_\ell - 1} \in \tilde{I}_\ell$ への作用を計算すると,

$$\begin{aligned} & P^* \chi(z) q_\ell^{\mu_\ell - 1} \\ = \quad & -\prod_{j=1}^{N} q_j^{\mu_j} \frac{d}{dz} \frac{1}{\prod_{i=1}^{N} q_i^{\mu_i - 1}} \chi(z) q_\ell^{\mu_\ell - 1} \end{aligned}$$

$$= \quad -\prod_{j=1}^{N} q_j^{\mu_j} \frac{d}{dz} \frac{\chi(z)}{\prod_{i\neq\ell} q_i^{\mu_i - 1}}$$
$$= \quad \left(\chi(z)\sum_{j\neq\ell}((\mu_j-1)q_j' \prod_{k\neq j,\ell} q_k) - \chi'(z)\prod_{j\neq\ell} q_j\right) q_\ell^{\mu_\ell} \in I_\ell$$

が成り立つ．一方, $\varphi(z)$ をある $\eta(z) \in \mathbf{Q}[z]$ に対して $P^*\varphi(z) = \eta(z)q_\ell^{\mu_\ell}$ を満たすものとすると

$$P^*\varphi(z) = \eta(z)q_\ell^{\mu_\ell}$$

より

$$-q(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{\prod q_j^{\mu_j-1}}\varphi(z) = \eta(z)q_\ell^{\mu_\ell}$$

であり, さらに両辺に $-1/q(z)$ を掛け, 積分すると,

$$\frac{\varphi(z)}{\prod_{j\neq\ell} q_j^{\mu_j-1}} \frac{1}{q_\ell^{\mu_\ell-1}} = -\int \frac{\eta(t)}{\prod_{j\neq\ell} q_j^{\mu_j}} dt$$

となる. よって, $\varphi(z)$ は

$$\varphi(z) = -\prod_{j\neq\ell} q_j^{\mu_j-1} \left(\int \frac{\eta(t)}{\prod_{j\neq\ell} q_j^{\mu_j}} dt\right) q_\ell^{\mu_\ell-1}$$

の形に表される. このとき, 被積分関数は $q_\ell(z) = 0$ の近傍で正則であるから, $\varphi(z) \in \tilde{I}_\ell$ となり, 定理の主張が示された. ∎

以上により, 大域的に定義された微分作用素 P の形式的随伴作用素 P^* によって, 線形写像 (8) の $\mathbf{Q}[z]/I_\ell$ における像と核を共に特徴付けることができることが分かった．線形写像 $P^* : \mathbf{Q}[z]/I_\ell \to \mathbf{Q}[z]/I_\ell$ の像と核に対する次元について次が成り立つ.

系 7
dim Image$(P^*) = d_\ell\mu_\ell - d_\ell$, dim Kernel$(P^*) = d_\ell$.

2.3 アルゴリズム

$q(z)$ の零点の集合を A とおく．$h(z)$ を $\mathbf{Q}$ 係数多項式で 任意の $\alpha \in A$ に対して $h(\alpha) \neq 0$ を満たすとする．また, 多項式 g_1 を多項式 g_2 で割った余りを $\mathrm{srem}(g_1, g_2)$ で表すことにする.

以下, $q(z)$ の重複度 $\mu_\ell > 1$ の因子 q_ℓ に対して, 有理関数 $h(z)/q(z)$ の $A_\ell = \{z \mid q_\ell(z) = 0\}$ における留数値を求める方法を与える.

$$V_{K_\ell} = \{\phi(z) \in \mathbf{Q}[z]/I_\ell \mid \mathrm{Res}_{A_{\ell,j}}(\phi(z)dz, m) = 0, A_{\ell,j} \in A_\ell\}$$

とおく．今, $\deg q_\ell = d_\ell$, $d_\ell\mu_\ell - d_\ell = \kappa_\ell$ とおくと, $m = 1/q(z) \bmod \mathcal{O}_X$ の annihilator P に対して, V_{K_ℓ} は $Span\{\mathrm{srem}(P^*1, q_\ell^{\mu_\ell}), \ldots, \mathrm{srem}(P^*z^{\kappa_\ell-1}, q_\ell^{\mu_\ell})\}$ で与えられる．また, V_{J_ℓ} を

$$V_{J_\ell} = Span\{q_\ell^{\mu_\ell-1} \cdot 1, \ldots, q_\ell^{\mu_\ell-1} \cdot z^{d_\ell-1}\}$$

とおく．このとき, 系 1 より $\dim V_{K_\ell} + \dim V_{J_\ell} = \dim \mathbf{Q}[z]/I_\ell$ となり, $V_{K_\ell} \cap V_{J_\ell} = \{0\}$ である．よって,

$$\mathbf{Q}[z]/I_\ell = V_{K_\ell} \oplus V_{J_\ell}$$

が成り立つ．これにより, $h_{\mathrm{rem}} = \mathrm{srem}(h, q_\ell^{\mu_\ell})$, $\sigma_j = \mathrm{srem}(P^* z^j, q_\ell^{\mu_\ell}) \quad (0 \le j \le \kappa_\ell - 1)$, $\iota_j = q_\ell^{\mu_\ell - 1} z^j \quad (0 \le j \le d_\ell - 1)$ とおき, $a_0, \ldots, a_{\kappa_\ell - 1}$, $b_0, \ldots, b_{d_\ell - 1}$ を未定係数とする方程式 $h_{\mathrm{rem}} = \sum_{j=0}^{\kappa_\ell - 1} a_j \sigma_j + \sum_{j=0}^{d_\ell - 1} b_j \iota_j$ を解くことにより, 係数 a_j, b_j が一意に定まる．このとき定理 3 により, $\mathrm{Res}_{A_{\ell,j}}(hdz, m) = \mathrm{Res}_{A_{\ell,j}}((\sum_{j=0}^{d_\ell - 1} b_j \iota_j) dz, m), A_{\ell,j} \in A_\ell$ が成り立つ．微分作用素 P は (1) で与えられるものであるから, $q_{\mathrm{sqfr}} = q/\mathrm{GCD}(q, q')$, $q_{\mathrm{gcd}} = q'/\mathrm{GCD}(q, q')$ とおくと, P^* の像は具体的に $P^* z^k = -kz^{k-1} q_{\mathrm{sqfr}} + (q_{\mathrm{gcd}} - q'_{\mathrm{sqfr}}) z^k$ と表される．(これは, $q(z)$ の無平方分解 $q(z) = q_1^{\mu_1} \cdots q_N^{\mu_N}$ に対して, $kz^{k-1} \prod_{j=1}^N q_j + (\sum_{i=1}^N (\mu_i - 1) q'_i \prod_{j \ne i} q_j) z^k$ と表される.) また, 有理関数 $\sum_{j=0}^{d_\ell - 1} b_j \iota_j / q = (1/\prod_{j \ne \ell} q_j^{\mu_j})(\sum_{j=0}^{d_\ell - 1} b_j z^j / q_\ell)$ は, A_ℓ 上, 高々一位の極のみをもつ関数であり, 注意で述べた方法で, 留数値を計算することができる．これらをまとめて, 次のアルゴリズムを得る．(g_1 を g_2 で割った商を $\mathrm{sdiv}(g_1, g_2)$ とする.)

有理関数 $h(z)/q(z)$ の $q_\ell(z) = 0$ における留数値を求めるアルゴリズム

input：多項式 $q(z)$, $h(z)$, $q_\ell^{\mu_\ell} (\deg q_\ell = d_\ell)$

- $q_{\mathrm{sqfr}} := \mathrm{sdiv}(q, \mathrm{GCD}(q, q'))$
- $q_{\mathrm{gcd}} := \mathrm{sdiv}(q', \mathrm{GCD}(q, q'))$
- $h_{\mathrm{rem}} := \mathrm{srem}(h, q_\ell^{\mu_\ell})$
- $\kappa_\ell := d_\ell \mu_\ell - d_\ell$
- $\sigma_k := \mathrm{srem}(-kz^{k-1} q_{\mathrm{sqfr}} + (q_{\mathrm{gcd}} - q'_{\mathrm{sqfr}}) z^k, q_\ell^{\mu_\ell})$ for $0 \le k < \kappa_\ell$
- $\iota_j := q_\ell^{\mu_\ell - 1} z^j$ for $0 \le j < d_\ell$
- $a_0, \ldots, a_{\kappa_\ell - 1}, b_0, \ldots, b_{\mu_\ell - 1} :=$ rational numbers s.t. $h_{\mathrm{rem}} = \sum_{j=0}^{\kappa_\ell - 1} a_j \sigma_j + \sum_{j=0}^{d_\ell - 1} b_j \iota_j$
- $b := \sum_{j=0}^{d_\ell - 1} b_j z^j$
- $q_{\mathrm{div}} := \mathrm{sdiv}(q, q_\ell^{\mu_\ell})$
- $R :=$ イデアル $\langle q_\ell, \mu_\ell b - t \cdot q'_\ell q_{\mathrm{div}} \rangle$ の辞書式項順序 $z \succ t$ に関するグレブナ基底
- Residue := イデアル $R \cap \mathbf{Q}[t]$ の生成元

output：Residue

このとき Residue は $q_\ell = 0$ 上の留数値の満たす方程式であり, R は留数値と零点の座標 $\{z \mid q_\ell = 0\}$ との関係式を表す.

例 1
$q(z) = z^{14}+2z^{13}+2z^{12}+4z^{11}+z^{10}+z^8-4z^7+2z^6-2z^5+z^4 = (z^2+1)^3(z^2+z-1)^2z^4$, $h(z) = 6z^{11}-z^{10}+17z^9-9z^8+16z^7-20z^6-50z^5-27z^4+24z^3-44z^2-9z-17$ に対して, 有理関数 $\dfrac{h(z)}{q(z)}$ の $A_0 = \{z \mid z^2+1=0\}$ における留数値を計算する.

$m = \dfrac{1}{q(z)} \bmod \mathcal{O}_X$ の annihilator P は

$$P = (z^5+z^4+z^2-z)\frac{d}{dz}+14z^4+12z^3-2z^2+6z-4$$

で与えられる. $q_0 = z^2+1$ とおく. 今, $\mathbf{Q}[z]/\langle q_0^3\rangle$ は $Span\{1,z,z^2,z^3,z^4,z^5\}$ で与えられるが, 定理 4 と系より, P の随伴作用素 $P^* = -(z^5+z^4+z^2-z)\dfrac{d}{dz}+9z^4+8z^3-2z^2+4z-3$ に対しては, $\mathbf{Q}[z]/\langle q_0\rangle \equiv Span\{1,z,z^2,z^3\}$ の像が一次独立であることが分かる.

$$\begin{array}{rcll}
P^*1 &=& 9z^4+8z^3-2z^2+4z-3, & \\
P^*z &=& 8z^5+7z^4-2z^3+3z^2-2z, & \\
P^*z^2 &=& 7z^6+6z^5-2z^4+2z^3-z^2, & \\
&=& 6z^5-23z^4+2z^3-22z^2-7 & \bmod \quad \langle q_0^3\rangle, \\
P^*z^3 &=& 6z^7+5z^6-2z^5+z^4, & \\
&=& -20z^5-14z^4-18z^3-15z^2-6z-5 & \bmod \quad \langle q_0^3\rangle.
\end{array}$$

このとき, $h(z)$ は $h(z) = (20z+9)(z^2+1)^2+P^*(3z^3-2z+4)+(6z^5-z^4-z^3-6z^2+z+1)(z^2+1)^3$ と分解することができ, これより, 有理関数 $h(z)/q(z)$ の A_0 における留数はイデアル $\langle z^2+1, (20z+9)-t(2z)(z^2+z-1)^2z^4\rangle$ に関する計算をすることにより, $-100t^2+384t-481=0, -53z+50t-96=0$ を満たす t として与えられることがわかる. また, α を z^2+1 の零点とすると, α における留数値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\alpha\left(\frac{h(z)}{q(z)}\right) &= \mathrm{Res}_\alpha\left(\frac{20z+9}{(z^2+1)(z^2+z-1)^2z^4}\right) \\
&= \frac{20\alpha+9}{2\alpha(\alpha^2+\alpha-1)^2\alpha^4} \\
&= \frac{53\alpha+96}{50}
\end{aligned}$$

と表現することができる.

ここでは, 大域的に定義された作用素 P をそのままの形で局所的な留数値の計算に用いる方法を示した. 一方で, 作用素 P 自身を $q_\ell = 0$ 上に局所化することによってももちろん計算可能であるが, その場合, 局所化された作用 P_ℓ は 0 階項の次数は一般に $\mu_\ell \deg(q_\ell)-1$ となる. すなわち, P_ℓ を行列表現したものは疎行列ではなく, よって, 独自に計算する程効率が良いわけではない. このことも含めて次の例を見る.

例 2
$q(z) = (z^2+1)^{13}(z^3+1)^{11}$, $h(z) = z^{40}+z^{30}+z^{20}+z^{10}+1$ に対して, 有理関数 $\dfrac{h(z)}{q(z)}$ の $A_0 = \{z \mid z^2+1=0\}$ における留数を計算する.

$m = 1/q(z) \mod \mathcal{O}_X$ の一階の annihilator P は

$$P = (z^5 + z^3 + z^2 + 1)\frac{d}{dz} + 59z^4 + 33z^2 + 26z$$

で与えられる．零階の作用素 $Q_0 = (z^2+1)^{13}$ に対し, $\langle P, Q_0 \rangle = \langle P_0, Q_0 \rangle$ を満たす一階の微分作用素 P_0 として，　次の形のものがとれる．

$$\begin{aligned} P_0 \quad = \quad & (z^2+1)\frac{d}{dz} - \frac{90123}{4096}z^{25} - \frac{45045}{4096}z^{24} - \frac{563277}{2048}z^{23} - \frac{247731}{2048}z^{22} - \frac{1599741}{1024}z^{21} \\ & - \frac{596739}{1024}z^{20} - \frac{10883103}{2048}z^{19} - \frac{3241953}{2048}z^{18} - \frac{49168119}{4096}z^{17} - \frac{10440969}{4096}z^{16} \\ & - \frac{19324305}{1024}z^{15} - \frac{2201199}{1024}z^{14} - \frac{21054}{z}^{13} - \frac{17137263}{1024}z^{11} + \frac{2234991}{1024}z^{10} \\ & - \frac{38691081}{4096}z^{9} + \frac{10576137}{4096}z^{8} - \frac{7702497}{2048}z^{7} + \frac{3241953}{2048}z^{6} - \frac{1036035}{1024}z^{5} \\ & + \frac{630531}{1024}z^{4} - \frac{315315}{2048}z^{3} + \frac{315315}{2048}z^{2} + \frac{61451}{4096}z + \frac{45045}{4096}. \end{aligned}$$

これは有理関数 $1/q(z)$ を

$$\frac{1}{(z^2+1)^{13}(z^3+1)^{11}} = \frac{c_0(z)}{(z^2+1)^{13}} + \frac{c_1(z)}{(z^3+1)^{11}}$$

と分解したときの $c_0(z)/(z^2+1)^{13}$ の annihilator であり, 作用素 P を A_0 に局所化したものに他ならない．この作用素 P_0 の形式的随伴作用素の像として, $V_{K_0} = \{\phi(z) \in \mathbf{Q}[z]/\langle (z^2+1)^{13} \rangle \mid \mathrm{Res}_{A_0}(\phi(z)dz, m) = 0\}$ を決定することができる．しかし, この作用素 P_0 は, 0 階の次数が 25 次となり, 形式的随伴作用素の像の計算は, この局所化して得た作用素 P_0 よりも, 既に大域的に構成してある作用素 P を用いた方が明らかに効率的である．

P を用いて前例と同様に計算することにより, A_0 における留数値の満たす方程式

$$\begin{aligned} & 264978186238944091879266365514711040000t^2 \\ & -441394619696683297638887329497180274688000t \\ & +913846638105640016484682061081656073697820901 = 0 \end{aligned}$$

を得, また, 留数値と座標との関係は

$$-270190741011036252456 26z + 1627815057796628 4800t - 1355788600131714 2727905 = 0$$

で与えられることが分かる．

3　まとめ

微分作用素を用いた一変数関数の留数値計算に関して, 作用素を局所化することなく, 局所的に留数値を求めることができることを示し, そのアルゴリズムを与えた．つまり, 与えられた有理関数に対して, 高い位数を持つ極における留数値を求める場合に, その点に注目して部

分分数分解をし直すことや, アルゴリズムに用いる微分作用素を改めて求め計算し直すことなく, 局所的に留数値を求めることができる. これにより, 代数拡大体の計算を回避して留数値を計算することができる. また, 本稿の結果を多変数の場合に拡張することができ, 多変数関数の留数値計算に関して得た結果 (文献 [7] 参照) に関しても同様な局所化を与えることができる. それについては改めて述べる予定である.

参 考 文 献

[1] J. Briançon et Ph. Maisonobe. *Idéaux de germes d'opérateur différentiels à une variable*, L'Enseignement Math. **30** (1984), 7-38.

[2] M. Kashiwara. *On the maximally overdetermined system of linear differenial equations, I.*, Publ.RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 563-579.

[3] M. Kashiwara. *On the holonomic systems of linear differntial eqauations, II.*, Inventiones mathematicae **49** (1978), 121-135.

[4] D. Lazard and R. Rioboo, *Integration of rational functions: rational computation of the logarithmic part*, J. Symbolic Comput. **9** (1990), 113–115.

[5] S. Tajima, Y. Nakamura. *Residue calculus and Horowitz's algorithm about rational function with differential equation*, (in japanese), Sûrikaiseki Kenkyûsho Kôkyûroku. **1038** (1998), 23–30.

[6] S. Tajima, Y. Nakamura, *Residue calculus with Differential operator*, Kyushu J. Math. **53** (1999) , to appear.

[7] S. Tajima and Y. Nakamura, 多変数留数計算について, 数式処理 **7**, 1 (1998), 39–40.