数式処理 *Bulletin of JSSAC (2009)*
Vol. 16, No. 2, pp. 23 - 31

特集記事＜統計科学と数式処理＞

ゾーナル多項式の数式処理と最小固有値分布の計算

橋口博樹 *

埼玉大学

概　要

We explain a generating algorithm for the expansion of zonal polynomials in terms of elementary symmetric functions. Numerical computation on the distribution of the smallest latent root of Wishart matrices is discussed as an application of the calculation of zonal polynomials. We also explain the role of computer algebra systems in such computations.

1　はじめに

ゾーナル多項式は，多変量正規母集団下で共分散行列の分布，特に固有値分布を記述する重要な多項式である．この多項式は，James[10] によって，一般線形群と直交群に関する表現論を利用して導出された．James[10] 以降，共分散行列の固有値に関する多くの統計量が，ゾーナル多項式を使って求められている (Constantine[1], 早川 [6, 7], James[11])．しかしゾーナル多項式の数値計算の困難性から，1960, 1970 年代での高次ゾーナル多項式の計算実現は，Sugiyama[25] の 2 変数で 200 次の場合に限られる．この Sugiyama[25] の計算方法を利用して，Sugiura[23] では，2 変数の場合に最大固有値，最小固有値の分布を数値計算し，基本統計量など分布の様相を調べている．なお，低次の場合では，12 変量，12 次までは，McLaren[17] でプログラムが実装されている．

3 変量以上のゾーナル多項式の数値計算は，Hashiguchi and Niki [2]，Hashiguchi, Nakagawa and Niki[3] で実装され，これを利用した最大，最小固有値の分布の数値計算が Hashgiuchi and Niki[4] で行われている．これら 3 変量以上の成果は，数式処理システムの支援によるところも大きい．

一方，Jack[8, 9] は，James[10] のゾーナル多項式を拡張して，後にジャック多項式と呼ばれるパラメータ α 付きの対称式を導入した．$\alpha = 2$ のとき，ジャック多項式はゾーナル多項式となり，さらに $\alpha = 1$ のときシュアー多項式（複素ゾーナル多項式），$\alpha = -1$ のとき，Kendall and Stuart[14] で扱われている拡延対称式となる．Jack[9] では，拡延対称式からベキ和多項式への相互変換方法が述べられており，これは，中川，仁木 [19] の多変量拡延対称式，多変量ベキ和多項式の相互変換アルゴリズムの一変量版に相当する．ジャック多項式の組合せ論

*hiro@mail.saitama-u.ac.jp

的な性質は Stanley[22] で解明され，Koef and Edelman[16] は Stanley[22] の結果を利用して，ジャック多項式の計算方法の提案と固有値分布の計算を行っている．

本論文では，著者らの結果（Hashiguchi and Niki [2]，Hashiguchi et al.[3], Hashgiuchi and Niki[4]）を中心に解説する．ゾーナル多項式計算のためのアルゴリズムの構築とウィシャート行列の最小固有値分布の数値計算について，数式処理システムの活用方法についても述べる．2 節では，ゾーナル多項式の定義と基本対称式で展開するための方法論を述べ，3 節で最小固有値分布の数値計算を行う．

2　ゾーナル多項式

次数 $k > 0$，長さ $m > 0$ 以下の分割全体の集合を

$$P_m^k = \left\{ \kappa = (\kappa_1\, \kappa_2\, \ldots\, \kappa_m) \mid \sum_{i=1}^{m} \kappa_i = k,\, \kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_m \geq 0 \right\}$$

で表し，$>$ を P_m^k 上の辞書式逆順序とする．変数 $x_1, \ldots, x_m$，分割 $\kappa \in P_m^k$ の基本対称式 $\mathcal{E}_\kappa(x_1, \ldots, x_m)$ を

$$\mathcal{E}_\kappa(x_1, \ldots, x_m) = e_1^{\kappa_1-\kappa_2}\, e_2^{\kappa_2-\kappa_3}\, \cdots\, e_{m-1}^{\kappa_{m-1}-\kappa_m}\, e_m^{\kappa_m}$$

で定義する．ただし $e_1, e_2, \ldots, e_m$ は通常の基本対称式:

$$e_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_m,\ e_2 = x_1\, x_2 + \cdots + x_{m-1}\, x_m,\ \ldots,\ e_m = x_1\, x_2\, \cdots\, x_m$$

を表す．このとき，基本対称式 $\mathcal{E}_\kappa(x_1, \ldots, x_m)$ の次数は $\sum_{i=1}^{m-1} i\,(\kappa_i - \kappa_{i+1}) + m\,\kappa_m = k$ であり，分割の次数に等しい．

ゾーナル多項式の定義は，表現論に基づく定義，あるいは存在定理を基になされる．Muirhead [18] は，単項対称式展開でのゾーナル多項式存在の一意性を用いて，ゾーナル多項式の定義としている．Murihead[18] の定義における単項対称式を基本対称式で置き換えたものが，次の命題 1 である．

命題 **1**　以下の 3 条件を満たす $x_1, \ldots, x_m$ の k 次同次対称多項式の集合 $\left\{ C_\kappa(x_1, \ldots, x_m) \mid \kappa \in P_m^k \right\}$ が一意に決まる．

1. 上三角性

$$C_\kappa(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\kappa \geq \mu} q[\kappa, \mu]\, \mathcal{E}_\mu(x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

ただし，$q[\kappa, \kappa] > 0$.

2. Laplace-Beltrami オペレータ D_m の固有関数.

$$D_m\, C_\kappa(x_1, \ldots, x_m) = d(\kappa)\, C_\kappa(x_1, \ldots, x_m) \tag{2}$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
D_m &= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{1\le i\ne j\le m} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
d(\kappa) &= \sum_{i=1}^{m} \kappa_i\,(\kappa_i + m - i - 1)
\end{aligned}
$$

3. e_1^k を係数 1 で展開する．

$$
e_1^k = (x_1 + \cdots + x_m)^k = \sum_{\kappa\in P_m^k} C_\kappa(x_1,\ldots,x_m). \tag{3}
$$

定義 1　上の $C_\kappa(x_1,\ldots,x_m)$ を分割 κ に対するゾーナル多項式と呼ぶ．

ゾーナル多項式 $C_\kappa(x_1,\ldots,x_m)$ を生成するには，上の 1, 3 の条件下で 2 の偏微分方程式を解けばよい．この偏微分方程式を $\mathcal{E}_\mu(x_1,\ldots,x_m)$ に関する係数比較で解くために，まず，D_m を基本対称式で変数変換する．この変換は単に，

$$
\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial e_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial e_j}
$$

を D_m に代入すればよい．

定理 1 (Hashiguchi et al. [3])　Laplace-Beltrami オペレータ D_m を基本対称式で変換したとき，その表現形 Δ_m は以下で与えられる:

$$
\Delta_m = \sum_{i=1}^{m}\left(m\,i - \frac{i\,(i+1)}{2}\right) e_i \frac{\partial}{\partial e_i} + \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{t-1}(-1)^{s+t-k-j}\, e_k\, e_j\, p_{s+t-k-j}\right)\frac{\partial^2}{\partial e_s \partial e_t} \tag{4}
$$

ただし $p_l = \sum_{i=1}^{m} x_i^l$ であり，(5) 式によって基本対称式の積和に変換できる．

$$
p_l = \det\begin{bmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ le_l & e_{l-1} & e_{l-2} & \cdots & e_1 \end{bmatrix}. \tag{5}
$$

また，(5) 式において $l > m$ ならば $e_l = 0$ とする．

この Δ_m から，ゾーナル多項式の係数 $q[\kappa,\mu]$ の漸化式が以下のように求められる．

定理 2 (Hashiguchi et al. [3])　ゾーナル多項式の基本対称式展開

$$
C_\kappa(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\mu\le\kappa} q[\kappa,\mu]\,\mathcal{E}_\mu(x_1,\ldots,x_m)
$$

において，漸化式

$$\{d(\kappa) - d(\mu)\}\, q[\kappa,\mu] = \sum_{\kappa \geq \nu > \mu} b[\nu,\mu]\, q[\kappa,\nu] \tag{6}$$

が成り立つ．ただし，$b[\nu,\mu]$ は，

$$\Delta_m\, \mathcal{E}_\nu(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\mu \leq \nu} b[\nu,\mu]\, \mathcal{E}_\mu(x_1,\ldots,x_m) \tag{7}$$

で決定される．

具体的に m が正の整数値で与えられるとグレブナ基底を利用した基本対称式への生成元変換により，漸化式を求めることができる．例えば，$m = 2$ のとき，数式処理システム Mathematica では `AlgebraicRules[]` 命令を使って以下のように計算できる．ただし，あらかじめ $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial e_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial e_1} + \frac{\partial e_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial e_2}$ の微分を計算する．ここで，`d[1]`，`d[2]` はそれぞれ，$\frac{\partial}{\partial e_1}, \frac{\partial}{\partial e_2}$ を表す．

```
In[1]:= BL = d[1] x[1] + d[1]^2 x[1]^2 + d[1] x[2] + d[2] x[1] x[2] +
    2 d[1] d[2] x[1]^2 x[2]  + d[1]^2 x[2]^2 + 2 d[1] d[2] x[1] x[2]^2
    + 2 d[2]^2 x[1]^2 x[2]^2;

In[2]:= rl = AlgebraicRules[{e[1] == x[1] + x[2], e[2] == x[1] x[2]},
                  {x[1], x[2], e[1], e[2]}]

In[3]:= BL /. rl
Out[3]:= d[1] e[1] + d[1]^2 e[1]^2 - 2 d[1]^2 e[2] + d[2] e[2] +
    2 d[1] d[2] e[1] e[2] + 2 d[2]^2 e[2]^2
```

`Out[3]` の出力結果を TEX の形式でまとめた式が (8) 式である．

$$\Delta_2 = (e_1^2 - 2\,e_2)\left(\frac{\partial}{\partial e_1}\right)^2 + 2\,e_1\,e_2\,\frac{\partial^2}{\partial e_1 \partial e_2} + 2\,e_2^2\left(\frac{\partial}{\partial e_2}\right)^2 + e_1\,\frac{\partial}{\partial e_1} + e_2\,\frac{\partial}{\partial e_2}. \tag{8}$$

さらに対応する漸化式は，$\kappa > \mu$ に対して，

$$\{d(\mu) - d(\kappa)\}\, q[\kappa,\mu] = 2(\nu_1 + 2)\,(\nu_1 + 1)\, q[\kappa, (\mu_1 + 1, \mu_2 - 1)] \tag{9}$$

となる．ただし，$\kappa = (\kappa_1,\kappa_2), \mu = (\mu_1,\mu_2), \nu_1 = \mu_1 - \mu_2, \nu_2 = \mu_2$ である．

$m = 3$ の場合は Kowata and Wada [15] で漸化式が求められると同時に解かれ，ゾーナル多項式の基本対称式展開が明示的に与えられている．Hashiguchi and Niki [2] は，$m = 3$ において計算機の利用を前提とした漸化式の計算方法を提案し，Hashiguchi et al. [3] で $m \geq 4$ へ拡張している．Hashiguchi et al.[3] の方法は，一度漸化式が出来てしまえば，以下の命題 2 によって，$C_\kappa(x_1,\ldots,x_m)$ の基本対称式 $\mathcal{E}_\mu(x_1,\ldots,x_m)$ の係数 $q[\kappa,\mu]$ が 辞書式逆順序での高い順

に決定できるというものである．この決定過程をまとめたものが以下のアルゴリズム 1 であり，これはグラムシュミットの直交化法と同等である．Beltrami オペレータを使って単項対称式による展開での同様のアプローチが James[12] にある．

命題 **2**　ゾーナル多項式 $C_\kappa(x_1,\dots,x_m)$ の基本対称式展開 (1) に現れる係数 $\left\{q[\kappa,\mu] \mid \mu \le \kappa \in P_m^k\right\}$ は，以下の 3 条件を満たす．

1. (James [11])　$\kappa = \mu \in P_m^k$ のとき，

$$q[\kappa,\kappa] = \frac{2^k\,k!}{\prod_{i=1}^m (2\kappa_i - i + m)!!} \prod_{1\le i<j\le m} \frac{(2\,\kappa_i - 2\,\kappa_j - i + j)!!}{(2\,\kappa_i - 2\,\kappa_j - i + j - 1)!!}$$

2. (Stanley [22])　もし $\kappa > \mu$ かつ $d(\kappa) = d(\mu)$ ならば，$q[\kappa,\,\mu] = 0$
3. もし $\kappa > \mu$ かつ $d(\kappa) \ne d(\mu)$ ならば，

$$q[\kappa,\mu] = \frac{1}{d(\kappa) - d(\mu)} \sum_{\kappa\ge\nu>\mu} b[\nu,\mu]\,q[\kappa,\nu]$$

である．ただし，$b[\nu,\mu]$ は，(7) 式で与えられる．

アルゴリズム **1 (Hashiguchi et al.[3])**

入力:　$\kappa \in P_m^k$
出力:　$C_\kappa(x_1,\dots,x_m) = \sum_{\kappa\ge\mu} q[\kappa,\mu]\,\mathcal{E}_\mu(x_1,\dots,x_m)$

1. 辞書式逆順序で κ 以下の 分割 $\mu^i \in P_m^k$ を全て生成する

$$\kappa = \mu^1 > \mu^2 > \cdots > \mu^s.$$

2. 命題 2 の 1. より，$q[\kappa,\mu^1] := q[\kappa,\kappa]$ を計算し, $i := 1$ とする．
3. $i := i + 1$
4. もし $d(\mu^i;\alpha) = d(\kappa;\alpha)$ ならば $q[\kappa,\mu^i] := 0$, そうでなければ,

$$q[\kappa,\mu^i] := \frac{1}{d(\mu^i) - d(\kappa)} \sum_{j=1}^{i-1} b[\mu^j,\mu^i]\,q[\kappa,\mu^j]$$

5. もし $i < s$ ならば Step 3 に戻り, そうでなければ以下を出力し終了する:

$$q[\kappa,\mu^1]\,\mathcal{E}_{\mu^1}(x_1,\dots,x_m) + \cdots + q[\kappa,\mu^s]\,\mathcal{E}_{\mu^s}(x_1,\dots,x_m).$$

例えば $m = 3$ のとき，$\kappa,\mu = (\mu_1,\mu_2,\mu_3) \in P_3^k$ に対して，$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 \ge 1$ ならば，順位の高い順に $\mu^1 = (\mu_1+1,\mu_2,\mu_3-1), \mu^2 = (\mu_1+1,\mu_2-1,\mu_3), \mu^3 = (\mu_1,\mu_2+1,\mu_3-1)$ とおき，漸化式は,

$$\begin{aligned}\{d(\kappa) - d(\mu)\}\,q[\kappa,\mu] \quad = \quad & 6\,(\nu_1+1)(\nu_2+1)\,q[\kappa,\mu^1] + 2\,(\nu_1+2)(\nu_1+1)\,q[\kappa,\mu^2] \\ & + 2\,(\nu_2+2)(\nu_2+1)\,q[\kappa,\mu^3]\end{aligned} \qquad (10)$$

である (Kowata and Wada[15]). ただし，$\nu_1 = \mu_1 - \mu_2, \nu_2 = \mu_2 - \mu_3$ である．また，$\kappa \not\geq \mu^i$ $(i = 1, 2, 3)$ ならば $q[\kappa, \mu^i] = 0$ とおくことにより，任意の $\mu \in P_3^k$ について，形式的に (10) 式が成立すると考えることができる． したがって，十分大きい k に対しても，高々4 項間の漸化式で $q[\kappa, \mu]$ が決定できることになる．$m = 4$ の時は 8 項間，$m = 5$ の時は 14 項間，$m = 6$ の時は 23 項間の漸化式である．

3 ウィシャート行列の最小固有値分布の計算

確率行列 $\boldsymbol{X}$ は $m \times n$ のサイズで，n 個の各列ベクトルは独立に同一>の多変量正規分布 $N_m(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従うとする．ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$ は母集団の共分散行列である．$m \times m$ 行列 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top$ の確率密度は,

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}mn}\Gamma_m(\frac{1}{2}n)|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}n}} \exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}W)\right]|W|^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}(m+1)} \tag{11}$$

である．ここで，$\Gamma_m(a)$ は多変量ガンマ関数

$$\begin{aligned}\Gamma_m(a) &= \int_{S>0} e^{-\operatorname{tr} S}|S|^{a-\frac{1}{2}(m+1)}(dS) \\ &= \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)}\prod_{i=1}^{m}\Gamma(a - \frac{1}{2}(i-1))\end{aligned}$$

であって，積分に現れる $S > 0$ は，対称行列 S が正定値であることを意味する．この確率行列 $\boldsymbol{W}$ が従う分布をウィシャート分布，n を自由度といい，ウィシャート分布を $W_m(n, \boldsymbol{\Sigma})$ と書く．ウィシャート行列 $\boldsymbol{W}$ は，$\boldsymbol{W}/n$ とすると標本の共分散行列に対応するので，その固有値は主成分分析などの解析で重要である．最大固有値の分布は Sugiyama[24] によってゾーナル多項式の無限級数として求められ，3 変量の場合に Sugiyama, Fukuda and Takeda[26] で数値計算されている．他方，最小固有値の分布は，Khatri [13] によってゾーナル多項式の有限級数として (12) 式で与えられている．さらに複素ウィシャート行列の最大，最小固有値の分布は，Ratnarajah, Vaillancourt and Alvo[21] によって，複素ゾーナル多項式 (シュアー多項式) の級数として求められている．本節では，ゾーナル多項式を $m \times m$ の対称行列に対して定義し，ある対称行列を $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}$ の固有値を $y_1, \ldots, y_m$ としたとき，行列 $\boldsymbol{Y}$ のゾーナル多項式 $C_\kappa(\boldsymbol{Y})$ は，$y_1, \ldots, y_m$ の>ゾーナル多項式 $C_\kappa(y_1, \ldots, y_m)$ を表すとする．また，ウィシャート行列 $\boldsymbol{W}$ の固有値を $\ell_1, \ldots, \ell_m$ $(\ell_1 > \cdots > \ell_m)$ とする．

命題 3 (Khatri[13])　もし $j = (n - m - 1)/2$ が非負整数なら，ウィシャート行列 $\boldsymbol{W}$ の最小固有値 ℓ_m の分布関数は,

$$\mathrm{P}[\ell_m < x] = 1 - \exp\left(-\frac{x}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\sum_{k=0}^{jm}\frac{x^k}{2^k k!}\sum_{\kappa}{}^{*}C_\kappa(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \tag{12}$$

で与えられる．ただし，和の記号 $\sum_\kappa^*$ は,

$$\left\{\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m) \in P_m^k \;\middle|\; \kappa_1 \leq j\right\}$$

の条件 $(\kappa_1 \leq j)$ を満たす分割にわたって和を取ることを意味する．

最小固有値 ℓ_m の分布を求めるプログラムを Mathematica で作成した．特に，$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(1,1,1)$ の場合，最小固有値の分布は，(12) 式 のゾーナル多項式を用いず，計算可能な形で求められる．$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda \boldsymbol{I}_m$ の場合 ($\boldsymbol{I}_m$ は m 次単位行列)，$\boldsymbol{W}$ の固有値 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ ($\ell_1 > \ldots > \ell_m > 0$) の同時密度関数 f は，

$$f(\ell_1, \ldots, \ell_m) = \frac{(2\lambda)^{-mn/2}\ \pi^{m^2/2}}{\Gamma_m(\frac{1}{2}m)\ \Gamma_m(\frac{1}{2}n)} \prod_{i<j}^{m} (\ell_i - \ell_j) \prod_{i=1}^{m} \ell_i^{(n-m-1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1} \ell_i\right)$$

であるので，具体的に m, n, λ を数値で与えれば，Mathematica を使って，最小固有値の密度を求めるための重積分を計算することができる．さらに，ゾーナル多項式を経由した密度関数と重積分での計算が一致することを確認することで検証ができる．後者のような重積分の計算が出来ることも数式処理システムを利用する利点である．例えば，$n = 10, \boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(1,1,1)$ の場合，最小固有値 ℓ_3 の密度関数は，(12) 式に基づいて分布関数を計算し，さらに微分することで

$$e^{-\frac{3}{2}x}\left(\frac{3x^3}{32} + \frac{9x^4}{128} + \frac{19x^5}{768} + \frac{x^6}{192} + \frac{x^7}{1536} + \frac{x^8}{21504} + \frac{x^9}{645120}\right)$$

と求められる．一方，Mathematica を利用した重積分では，

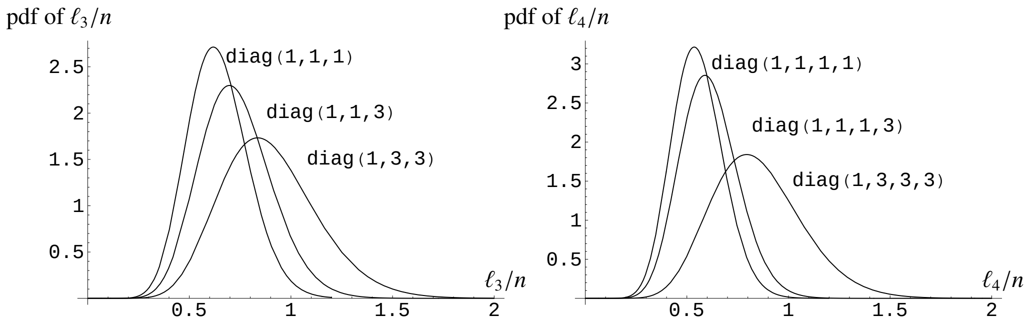
```
(* 多変量ガンマ関数*)
gm [m_, a_] := Pi^(1/4  m (m - 1))
  Product[Gamma [a - (i - 1)/ 2], {i, 1, m}];
(* 固有値の同時分布 *)
f[m_, c_, n_] := Pi^(1/2 m^2)/(2^(1/2 m n) gm[m, m/2]gm[m, n/2]) *
      Exp [-1/2 Apply[Plus, c]]
       Product[c[[i]]^((n - m - 1)/2), {i, 1,
        m}]*Product[c[[i]] - c[[j]], {j, 2, m} , {i, 1, j - 1}];

f3n = f[3, {c1, c2, c3}, 10];
f3n1 = Integrate[f3n, {c1, c2, Infinity}];
f3n2 = Integrate[f3n1, {c2, c3, Infinity}];
f3 = f3n2 /. c3 <- x
```

と計算することにより両者の一致が確認できる．

図 1 は，$m = 3, 4$ において，$\boldsymbol{\Sigma}$ を変化させたときの 最小固有値 ℓ_m/n の密度関数を示している．母集団の最小固有値はいずれの場合も 1 であるので，ℓ_m/n は，この 1 の周りで分布することが期待される．母集団の他の固有値が 1 から離れるにつれて，期待通りになっているようなことが見て取れる．

4 おわりに

本論文では，著者らの研究結果を中心に解説し，ゾーナル多項式の計算方法，それによる最小固有値分布の数値計算を行った．1 節で述べたジャック多項式の計算方法への応用は可



(a) 次元 $m = 3$, 自由度 $n = 30$ のとき (b) 次元 $m = 4$, 自由度 $n = 31$ のとき

図 1: 最小固有値 ℓ_m/n の密度関数のグラフ

能であり，橋口 [5] で実際に行っている．また，固有値分布論は，数理統計学を起源として発展してきたが，永尾 [20] で特集されているように様々な応用を持っている．こういった応用面でも実際の数値計算を行う際，数式処理システムは研究の支援になると考えられる．

参 考 文 献

[1] Constantine, A. G. (1963). Some noncentral distribution problems in multivariate analysis, *Ann. Math. Statist.*, **34**, 1270-1285.

[2] Hashiguchi, H. and Niki, N. (1997). Algebraic algorithm for calculating coefficients of zonal polynomials of order three, *J. Japan. Soc. Comput. Statist.*, **10**, 41-46.

[3] Hashiguchi, H., Nakagawa, S. and Niki, N. (2000). Simplification of the Laplace-Beltrami operator. *Mathematics and Computers in Simulation* **51**, 489–496.

[4] Hashiguchi, H. and Niki, N. (2006). Numerical computation on distributions of the largest and the smallest latent roots of the Wishart Matrix, *J. Japan. Soc. Comput. Statist.*, **19**, 45–56.

[5] 橋口 博樹 (2009). ゾーナル多項式生成の計算量について, 日本計算機統計学会第 23 回シンポジウム講演論文集, 221–224.

[6] 早川 毅 (1971). 正値対称行列上の確率分布およびそれに関連する分布, 数学 **23**, 1–16.

[7] 早川 毅 (1983). 正値対称行列上の確率分布およびそれに関連する分布 II, 一橋大学研究年報, 自然科学研究 22. 117–202

[8] Jack, H. (1970). A class of symmetric polynomials with a parameter, *Proc. Roy. Soc. Edinb. (A)*, **69**, 1–18.

[9] Jack, H. (1972). A surface integral and symmetric functions, *Proc. Roy. Soc. Edinb. (A)*, **69**, 347–363.

[10] James, A. T . (1960). The distribution of the latent roots of the covariance matrix, *Ann. Math. Statist.*, **31**, 151-158.

[11] James, A. T. (1964). Distribution of matrix variates and latent roots derived from normal

samples, *Ann. Math. Statist.*, **35**, 475-497.

[12] James, A. T. (1968). Calculation of zonal polynomial coefficients by use of the Laplace-Beltrami operator, *Ann. Math. Statist.*, **39**, 1711-1718.

[13] Khatri, C. G. (1972). On the exact finite series distribution of the smallest or the largest root of matrices in three situations, *J. Multutivariate. Anal.*, **2**, 201-207.

[14] Kendall, M. G. and Stuart, A. (1977). *Advanced Theory of Statistics*, **1**, 4th ed., Charles Griffin.

[15] Kowata, A. and Wada, R. (1992). Zonal polynomials on the space of 3×3 positive definite symmetric matrices, *Hiroshima Math. J.*, **22**, 433-443.

[16] Koef, P. and Edelman, A. (2006). The efficient evaluation of the hypergeometric function of a matrix argument, *Mathematics of Computation*, **75**, no. 254, 833–846.

[17] McLaren, M. L. (1976). Algorithm AS 94: Coefficients of the Zonal Polynomials, *J. Roy. Statist. Soc. C*, **25**(1), 82–87.

[18] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of multivariate statistical theory*. John Wiley, New York.

[19] 中川重和，仁木直人 (1991). 対称式の変換アルゴリズムとその多変量統計量分布論への応用, 計算機統計学, 第 4 巻, 第 1 号, 35–43.

[20] 永尾 太郎 (2007). ランダム行列百科擦乱, 数理科学, 特集/ランダム行列の広がり, 2007 年 2 月号, 5–11.

[21] Ratnarajah, T., Vaillancourt, R. and Alvo, M. (2005). Eigenvalues and condition numbers of complex random matrices, *SIAM J. MATRIX ANAL. APPL.* **26**, no. 2, 441–456.

[22] Stanley, R. P. (1989). Some combinatorial properties of Jack symmetric functions, *Adv. Math.*, **77**, 76-115.

[23] Sugiura, N. (1990). Graphs of the distributions of bivariate Wishart roots and their cumulants. *Journal of the Japan Statistical Society* **20**, 117–136.

[24] Sugiyama, T. (1967). On the distribution of the largest latent roots of the covariance matrix, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1148-1151.

[25] Sugiyama, T. (1979). Coefficients of zonal polynomials of order two. *Computer Science Monographs*, **No 12**.

[26] Sugiyama, T., Fukuda, M. and Takeda, Y. (1999). Recurrence relations of coefficients of the generalized hypergeometric function in multivariate analysis. *Communication in Statistics, Theory and Methods* **28**, 825-837.