数式処理 *Bulletin of JSSAC (2020)*
Vol. 26, No. 2, pp. 3 - 23

レター

高校生が数式処理システムを用いて数学研究を行うための方法の提案

宮寺 良平 *　　福井 昌則 †

関西学院高等部　　兵庫教育大学

(Received February 9, 2016　Revised December 26, 2019　Accepted August 21, 2020)

概　要

In this paper, we propose a method for high school students to discover new formulas and theorems using a computer algebra system. This method consists of several steps. First, the teacher and students select a problem of interest to them. Then, they modify or refine the problem to create a new problem for themselves and society. Moreover, to study the problem, a computer algebra system (e.g., Mathematica) can be used to create a program. Then, once students have found some interesting patterns, they can begin to prove them mathematically. This method is straightforward, but one of the most effective ways to discover new formulas for themselves and society and suggested that this could be a beneficial method in regular educational settings.

1　はじめに

平成 30 年に公示された高等学校新学習指導要領では，“理数探究”，“理数探究基礎” が設置され [1]，生徒が自身で探究的に学んでいくことが求められている．また，探究活動を充実化させるために，問題を解決するスキルのみならず，問題を作り出すこと，その問題を検証し解くこと，といった一連の学習を成立させるようにしていく必要がある．このような学習は，発見学習と捉えることができる．発見学習とは，学習者自身が結論を導く過程に参加することによって，自らの力で学習の目的である新しい知識や概念を獲得したり，問題解決の方法を学び取ったりする学習方法のこと [2] であり，教育の現代化の理論的基盤として重要視されている．そして，まったく未知のものを発見させるわけではなく，大人には既知である事柄を，子供に再発見させる過程を通して授業を成立させようとするものである [3]．ブルーナーによれば，発見学習の基本的プロセスは，(1) 学習課題の把握，(2) 問題の予想，(3) 仮説の設定，(4) 検証と確認，(5) 結論の発展の 5 つから構成されている [4]．そして発見学習

*runners@kwansei.ac.jp
†mafukui@hyogo-u.ac.jp

を用いた実践は多数実施され，課題発見のための実践事例集なども作成されている [5]．しかし，それらの実践において，新規性のある事実を発見させ，それを証明するといった活動はなされておらず，方法論も不明瞭である．国際競争力を有する人材を育成するために，創造性や創造的問題解決力を高めるような先進的な活動を行い，その活動によって得られた知見を現場の教育にフィードバックしていくことが重要であると考えられる．

一方，平成 30 年公示の新学習指導要領では，コンピュータなどの情報機器を用いて曲線を表すなどの必要性が指摘されており [1]，コンピュータを活用した数学教育をより充実化させていく必要がある．大橋 [6] は，新学習指導要領で実施が求められている新しい分野や新しい教育を数学ソフトウェアなしに教えることは難しいことを指摘している．特に “主体的 · 対話的で深い学び” で生徒の主体性を重視するために，生徒が主体的に活用できるソフトウェアの充実化が必要であると述べている．数学研究では，数学ソフトウェアの数式処理システムを用いることが有用な手段の 1 つであり，数式処理システムの活用した数学教育および生徒による数学研究活動を充実させていくことが重要であると考えられる．数式処理システムは，式のまま計算可能であることや，強力で有用な関数を多数有するといった特徴がある．実際，Mathematica が導入されている高校 (例えば SSH 指定校) も存在し，そのような現場で数学研究を展開することのみならず，多くの現場で数学研究を行うことができるモデルを考えていく必要がある．しかし高橋 [7] は，数式処理システムを用いた教育は難しい側面があることを指摘している．よって，数式処理システムを用いた数学教育を充実化するために，様々な活用事例を蓄積し，テクノロジーを活用した数学教育の分野の発展に寄与することが求められる．

数式処理システムを活用することで，簡単に手計算できない問題を解くことや，数値実験を行うことで法則を発見するなどが可能となる．数式処理システムの活用は，それまでの研究分野をより深く理解し拡張していくことが期待できる．数学研究活動を展開するためには，新しい問題を見つける/発見するプロセス (以下，“問題発見プロセス” とする) と，問題を解決するプロセス (以下，“問題解決プロセス” とする) のいずれにも着目する必要がある．そして，数式処理システムの活用は，問題解決プロセスを強くサポートするのみならず，問題をうまく選択することによって，法則を発見することをサポートすることが期待できる．今後高校生が数学研究活動を行うことを推進するために，問題発見プロセスと問題解決プロセスのいずれにも着目した実践を行うことが重要であると考えられる．

問題発見プロセスでは，高校生が自身で新しい問題を発見したり，課題を設定することが重要である．この発見は，“世の中にとって新しい問題の発見”，そして “生徒本人にとって新しい問題の発見” の 2 つの解釈が可能であり，このことは，恩田が指摘している創造性とほぼ同義と考えられる．恩田 [9, 10] は，マズロー [8] の “特別な才能の創造性 (天才とか科学者, 発明家, 芸術家などの特別な人たちにみられる創造性で，社会的に新しい価値をもつかどうかで評価されるもの)” と，“自己実現の創造性 (誰でももっているものであり，必ずしも社会的に高く評価されるものでなくても，その人にとって新しい価値のあるもの)” について述べた上で，両者には連続性があること，そして自己実現の創造性を専門的に深めることによっ

て，特別な才能の創造性に転化していくとしている．そして普通教育では，自己実現の創造性が重要であると述べている．よって，生徒本人にとって新しい問題を発見させることを指向しながら，世の中にとって新しい問題を発見することも場合によっては可能な実践モデルを構築することが，教育現場で実践を行うにあたっての重要な課題であると考えられる．

このような現状において，筆者らの活動では，高校生が国際学会発表や論文誌掲載を実現している (例えば [11, 12, 13, 14, 15] など多数)．その活動は先進的な事例として捉えられ，一部の特別な才能を持つ生徒によって行われていると考えられることが多い．しかし実際は，一定の方法論を用いることによって生徒の主体的な活動を促し，それを最後までやり遂げるといった，普通教育においても活用可能な方法を発展的に用いているといった部分が大半である．この方法は，既存の問題の一部変更することで新しい問題を作り，そして Mathematica のような数式処理システムで数値計算を行い，その結果を証明するという活動を実施というものである．つまり，上述した問題発見プロセスと問題解決プロセスのいずれも育成することを指向したものである．以上を踏まえ本稿では，宮寺 · 福井 [16] の内容を参考にしながら，高校生が数学において新たな事実を発見するための方法を提示し，その方法論を用いた実践事例について示す．

本稿の構成について示す．2 節で高校生が数学の新たな事実を発見するための実践モデルを提案する．そして．3 節では，2 節で述べた実践モデルの具体例として，Corner the Queen 問題を用いた題材を開発する．4 節では，3 節で開発した題材を用いた実践事例について報告する．その後，5 節で考察を行い，6 節で今後の展望を示す．

2　実践モデルの提案

本節では，高校生が数学の新たな事実を発見するために必要な要素について述べ，それらを取り入れた実践モデルを提案する．上述したように，本研究において目標とすることは，高校生が数学研究を行うためには何が必要かを検討し，その実践事例を提示することであるが，問題解決能力を高めることはもちろんのこと，問題を作り出す能力を高めることが求められる．従来から，問題解決能力を高めることが重視されてきたが，自身で課題を設定し，それを解いて発表するといった活動が重要視されるようになってきている．そして，生徒自身が課題を設定すると同時に，それが研究へと接続されるような活動を設定することが求められる．

以上のことを踏まえ，問題発見プロセスと問題解決プロセスのいずれにも着目した実践モデルを提案する．実践モデルは，以下の 7 つのステップから構成されている．最後の丸括弧内に活動の略称を示している．

(活動 1)　教員が生徒が興味を持ちそうな問題を選ぶ．あるいは生徒に適当な本を与えて，その中で興味を持てそうなものを選ばせる．(問題の提示 · 選択)

(活動 2)　選んだ問題を生徒が変形して新しい問題をつくる．ここで得られる問題は，一部だけ変更した問題である場合もあるし，全く違った問題になる場合もある．このようにして研究テーマの候補がいくつかできる．(問題の変形 · 改良)

(活動 3) 活動 1 で選んだ問題のプログラムを作成する．(プログラムの作成)
(活動 4) 活動 2 で得られた問題と活動 1 で選んだ問題の対応関係を考えながら，プログラムを変更する．(プログラムの変更 · 対応づけ)
(活動 5) 数式処理システムの計算から得られたデータを分析する．(データ分析)
(活動 6) データから (生徒自身もしくは世の中にとって) 新しい法則を発見した場合は，その法則を証明することを試みる．(証明)
(活動 7) 内容に応じて，高校生対象のコンテストでの発表や，学会発表，および論文執筆を行う．(発表)

2.1 活動 1 (問題の提示 · 選択)

研究の対象となる問題には様々な候補が考えられるが，特に高校生に研究をさせるためには，多くの予備知識を必要としないことや多くの数学経験を必要としない題材を活用することが求められる．この観点から，高校生の研究に適した分野としては，ゲーム要素を有する確率問題や， 組合せゲームなどが候補として考えられる．教育におけるゲームの有用性については，すでに多く指摘がなされている [17, 18]．これらの題材は，多くの予備知識を必要としないこと，実際にプレイすることで問題を理解できること，そして他の数学分野に比べて歴史が浅く，オープンエンド的要素を取り入れやすいことから，問題次第では研究の最先端に行くことができる可能性を有することがあげられる．また，勝ち負けのあるようなゲームは，グループで取り組むこともできるため，高校生対象の活動には導入しやすいなどが考えられる．これらの分野においては多くの書籍が出版されており (例えば [19, 20, 21, 22] など多数)，それらを複数準備することが有効であると想定される．また，問題を選ぶにあたり，様々な問題を集めた問題集 (例えば [23, 24, 25, 26]) も有用である場合があるため，そのような書籍も参考になる場合があると考えられる．

一方，未解決問題として有名な問題を題材にするのは困難が伴う．例えば，リーマン予想について計算機実験を行うと，新規性のある現象が出現する可能性があるが，そこから何か新しい事実を発見し証明するには多くの数学経験や知識が必要であり，法則性を見いだすことやそれを実際に解くことは容易ではないことが大半である．また，コラッツ問題 ($3n+1$ 問題) はシンプルな問題で取り組みやすいと考えられる場合があるが，エルデシュをはじめとした多くの研究者が解決できず，エルデシュは証明した者に賞金を出している．よって，研究の題材としては取り扱いが難しいことが想定される．そしてフィボナッチ数列のようによく知られた問題は，多くの人によって研究されており，新しい法則や数式を見つけるために，フィボナッチ数列の研究について知っておく必要がある．また飯高は，高校生であっても数論を題材とした数学研究が可能であるとした上で，その例について述べている [27, 28]．しかし，指導者が数論についての知識を有している必要があること，高校生が興味を持ちやすいかどうかは不明であることから，数論を用いる場合はこれらの条件をクリアできるかどうかについて検討した上で選択する必要がある．しかし，世の中にとって新規性のある問題を取り扱うのではなく，生徒にとって新しい事実を発見しそれをできるところまで解くという実践を行う場合，これらの問題も有効であることが想定されるため，実践の目標，目的，対

象者によって柔軟に選択することが重要であると考えられる．

2.2　活動 2 (問題の変形 · 改良)

Polya は, 問題を変更して新しい問題を作ることが，問題を理解し解決する上で非常に重要な役割を果たすと指摘している [29]．Boden は，創造性には " 組合せ","探索","変形" の 3 つのタイプがあると述べており，基本的な部分を変形できればより意外なアイディアが生まれると述べている [30]．Fukui et al. は，変形 · 改良が創造性と関連性があると仮定した上で，変形 · 改良の有用性について述べている [31]．他の研究においても，変形の有用性が述べられている [32]．上述したように，問題を変形 · 改良することは，元問題の理解を促すとともに，新しいアイディアを生み出すことや創造性の発揮に有効であると指摘されている．また，問題の変形は選んだ問題から新しい問題を作るために有用な方法の 1 つであると考えられる．よって，生徒に選んだ問題を理解させた上で，変形をさせる活動を取り入れる．変形は，新しい問題を作り出すことが比較的容易であり，ソースコードとの対応も取りやすい．このことから，選んだ問題のプログラムを組んでからその変形と対応づけることで，どのように数学的構造が変わったかなどを把握させることが期待できる．また，変形箇所を把握できれば，教員側も指導が行いやすいため，生徒と教員が積極的に議論を行うことが期待できる．

2.3　活動 3 (プログラムの作成)

数式処理システムには，Mathematica のような有償のものや，Maxima などのような無償のものがある．これらを予算や対象者によって選択する必要がある．高性能の電卓であっても研究が可能な場合もあるが，プログラミング言語を持っているシステムでなければ，計算の手間や時間などの問題から発見するまでの手間がかなりかかってしまう場合が想定される．例えば， 組合せゲームなどでは，後ほど示す Grundy 数の計算のために数式処理システムが強力なツールとなる．しかし本研究では，数式処理システムでコードを記述するスキルとして高いものは要求されない．問題に応じて最低限必要なコードを用いて研究を進め，目的を達成することが重要である．

2.4　活動 4 (プログラムの変更 · 対応づけ)

最初に選んだ問題 (活動 1) と変形して得られた問題 (活動 2) との対応関係や差分を考えながら，活動 3 で作成したプログラムを変更し，その問題を研究対象とする．元問題が構造化されていれば，変形後の問題との対応づけが比較的容易であり，そのことを生かすことで，生徒が新しい問題を作り出すことに対するハードルを下げることが期待できる．また，新しい問題を比較的容易に作り出すだけではなく，元問題の構造を把握することにつながり，従来の教育活動においても有効となる可能性がある．これは従来から行われている数学的活動などの促進に寄与することも期待できる．

2.5　活動 5 (データ分析)，活動 6 (証明)

問題にもよるが，パターンの中から法則性を見つけることが求められる研究では，生徒はそのデータからパターンや法則性を発見できる可能性がある．ただし，その法則を証明でき

ない場合も想定される．そして，興味深いが数学の専門家の興味の対象から外れてしまう場合も考えられる．しかし，生徒が自身で発見するという教育的価値はとても大きく，証明することができなくても，計算によって現れる現象は意味があるものと考えて問題ないと考えられる．よって生徒本人にとって新しいことを発見する活動にも用いることができる．また，証明が複雑になった場合や証明に必要な知識が高校の学習レベルを超えてしまった場合，証明を完成させるために数学者の力を借りなければならない場合も想定される．よって数学者に質問することや高大連携の道を模索することも場合によっては必要となる．

2.6 活動 7 (発表)

高校生対象のコンテストでの発表や，学会発表，および論文執筆を行うことは，生徒のモチベーションを維持するためにも重要である．また，生徒本人にとって新しい問題を発見させる活動では，授業内で報告させるような活動を行うなど，目的や目標，対象者によって，柔軟に対応することが重要であると考えられる．

2.7 活動の流れ

本稿における数学研究は，上述した活動 1 から活動 7 を順に行うことを想定している．そして活動 5 や活動 6 でうまく行かないことがあれば，活動 2 を再度行った上で活動 4 を実施する．活動 2 と活動 3 を入れ替えて実践するなども可能であり，対象者の状況や問題によって柔軟に変更することが重要であると考えられる．

3 実践モデルに基づいた題材開発

本節では，第 2 節で述べた実践モデルに基づき，特に生徒に新しい問題を発見させる部分に焦点を当てた題材開発を行う．以下，Corner the Queen 問題を用いた題材を開発するために，Corner the Queen 問題の定義とその数学的知識について述べる．そして，Corner the Queen 問題を題材とした実践方法の例について述べる．

Corner the Queen 問題 (以下 Queen 問題と略記) は，組合せゲームと呼ばれるゲームの 1 つである．組合せゲームとは，ゲームの局面 (状態) が全て公開されており (完全情報性)，サイコロなどの偶然に左右される要素がなく (確定性)，有限の手数によって必ずゲームが終了する (有限性) ゲームのことである [22]．組合せゲームは，比較的新しい数学の分野であり，実際にプレイできる問題も多いことから，生徒に興味 · 関心を持たせやすく，新しい問題を作りやすい．そして，研究をするために多くの数学的な予備知識を必要としないことから，比較的多くの生徒を参加させることが期待できる．詳細については後述するが，数字が並べられた表から法則を見出し，その法則を満たす式を作る，という活動が主体となっており，証明の方法としては高度なものはさほど要求されないことから，高校生でも取り組みやすい可能性がある．また，数式処理システムとの親和性も高いことから新規参入しやすく，数式処理システムを用いた研究分野として適した分野の 1 つであると考えられる．

Queen 問題の定義と数学的構造について述べる．Queen 問題とは，2 人のプレイヤーが交互にチェス盤上にある Queen を動かし, 左上の座標 $(0, 0)$ の場所に Queen を持っていったプレイヤーが勝ちとなるゲームである．図 1 のようなチェス盤を考える．大きさは，正式のチェ

ス盤の大きさに限定することはせず，必要に応じて右方向と下方向には限りなく伸ばすことができるとし，座標を図 1 のように定義する．ここで，y の方向を下向きとしている．Queen の進み方は，図 2 にあるように，◯ がついている左 (x 軸方向と逆)，上 (y 軸方向と逆)，左上方向であり，座標の値が増える方向 (× がついている方向) に進むことは出来ないとする．このようにルールを決めることにより，有限回で終了するゲームとなる．そして，以下のように Queen 問題を記述する．

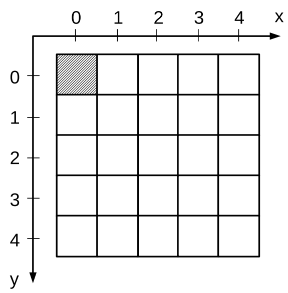

図 1: 座標の定義

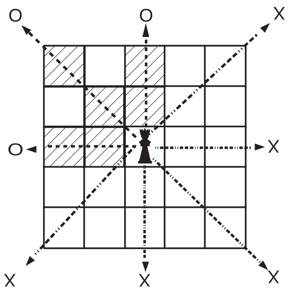

図 2: Queen の動き

問題 1 (Queen 問題)
チェス盤の上で Queen を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．ただし，座標の値が増える方向に進むことは出来ないとする．

ここで取り扱う Queen 問題は引き分けのないゲームであり，ゲームのどの場面も以下の 2 つのポジションのいずれかになる．

定義 2
(*a*) $\mathcal{N}$-position (先手必勝手) は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって，先手が必ず勝利できる状態のことである．
(*b*) $\mathcal{P}$-position (後手必勝手) は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤーがどのような戦略を使っても，後手のプレイヤーが最適な戦略を使うことによって，後手が必ず勝利できる状態のことである．

Queen 問題においては，必勝ポジションがどのような式や座標を満たすかについて求めることが大きな目標である．Queen 問題の必勝ポジションを研究するために，Grundy 数という概念が必要となる．以下にその具体的な算出方法について述べる．

定義 3 (move 関数)
駒の座標 **p** に対し，その座標 **p** から一手で移動できる座標の集合を move(**p**) と表記する．

Queen 問題において，$\mathrm{move}(x, y)$ は式 (1) のようになる．左に動くことは x 座標を減らすことであり，$\{(u, y) : u < x\}$ に対応する．上に動くことは，y 座標を減らすことであり，

$\{(x, v) : v < y\}$ に対応する．左上に動くことは x 座標と y 座標を同じ分だけ減らすことであり，$\{(x-t, y-t) : 0 < t \leq \min(x, y)\}$ に対応する．

$$\mathrm{move}(x, y) = \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \cup \{(x-t, y-t) : 0 < t \leq \min(x, y)\} \tag{1}$$

定義 4 (mex 関数)
mex 関数とは，非負整数からなる集合 S に含まれていない数字の中で，最も小さい非負整数を出力する関数である．(ここでの集合は，重複を許す重複集合として扱う．)

例 5 (mex の例)
$\mathrm{mex}\{0, 1, 2, 3\} = 4$, $\mathrm{mex}\{1, 1, 2, 3\} = 0$, $\mathrm{mex}\{0, 2, 3, 5\} = 1$

定義 6 (Grundy 数)
座標 (x, y) の Grundy 数を $\mathcal{G}(x, y)$ を，(i), (ii) で定義する．

(i) $\mathcal{G}(0, 0) = 0$ と定義する．
(ii) 任意の座標の点 (x, y) に対して，次のように再帰的に定義される．
$\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in \mathrm{move}(\mathbf{p})\}$．すなわち，Grundy 数とは与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態における Grundy 数からなる集合に含まれていない最小の非負整数である．

ここで，以下の定理が成り立つ．

定理 7
駒の座標 $\mathbf{h}$ が $\mathcal{P}$-position (後手必勝手) であるとき，またそのときに限り $\mathcal{G}(\mathbf{h}) = 0$.

この定理は組合せゲーム理論では良く知られたものであり，Grundy 数を求めることができる組合せゲーム全体に当てはまる定理である．証明は [22] に示されている．次に Grundy 数を実際に計算した様子を示す．なお，図 3 の各座標に対応する正方形内に書かれている数字は，その座標における Grundy 数を表している．他の図においても，この表記方法を用いる．

定義 6 の (i) より，座標 $(0, 0)$ の Grundy 数を 0 とする (図 3)．そして定義 6 の (ii) より，Grundy 数を各座標について再帰的に決めていく．座標の値が少ないものから Grundy 数を決めていき，ある座標の Grundy 数を決めるときには，その座標から一手で移動できる全ての座標の Grundy 数からなる集合に含まれない最小の非負整数を用いる．

座標 $(0, 1)$ (図 4 の斜線部) の Grundy 数を求める．Queen は，図 4 のように座標 $(0, 1)$ から座標 $(0, 0)$ に進むことができ，座標 $(0, 0)$ の Grundy 数は 0 であることから，座標 $(0, 1)$ の Grundy 数は，行き先の Grundy 数の集合である $\{0\}$ に含まれない最小の非負整数である．よって座標 $(0, 1)$ の Grundy 数は 1 となる．ここでは行き先が 1 つしかないので，行き先の Grundy 数の集合は要素を 1 つしか持たない．同様の方法で計算することにより，座標 $(1, 0)$ の Grundy 数は 1 となる．

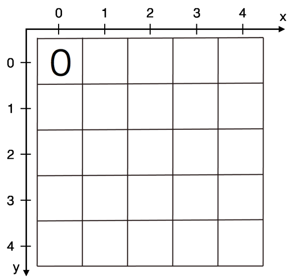

図 3: $(0,0)$ の Grundy 数 (定義)

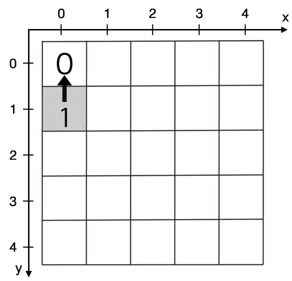

図 4: $(0,1)$ の行き先

次に, 座標 $(1,1)$ の Grundy 数を求める．この座標 $(1,1)$ からは, 図 5 のように座標 $(0,0), (1,0), (0,1)$ に進むことができ，行き先の Grundy 数の集合は $\{0,1,1\}$ である．よって，行き先に含まれない最小の非負整数は 2 であり，座標 $(1,1)$ の Grundy 数は 2 となる．次に，座標 $(2,0)$ の Grundy 数を考える．図 6 のように，座標 $(2,0)$ から座標 $(1,0), (0,0)$ に進むことができ，行き先の Grundy 数の集合は $\{1,0\}$ である．よって，座標 $(2,0)$ の Grundy 数は 2 となる．座標 $(2,1)$ の Grundy 数は，図 7 より，座標 $(2,1)$ から座標 $(1,0), (2,0), (0,1), (1,1)$ に進むことができ，行き先の Grundy 数の集合は $\{1,2,1,2\}$ である．よって，座標 $(2,1)$ の Grundy 数は 0 となる．このように再帰的な操作を行うことで，Grundy 数を求めることができる．

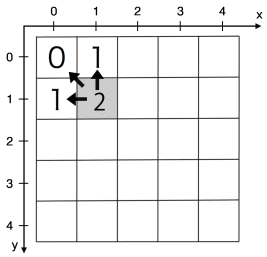

図 5: $(1,1)$ の行き先

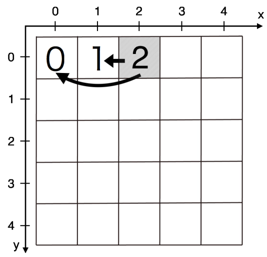

図 6: $(2,0)$ の行き先

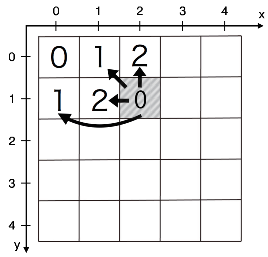

図 7: $(2,1)$ の行き先

注意 8

(i) Grundy 数の定義 6 から，次の (i.i) と (i.ii) が導かれる．

(i.i) Grundy 数が 0 のところからは，Grundy 数が 0 でないところへしか行けない．なぜならば，Grundy 数が 0 であるとき，定義 6 により，そこから移動する場所の Grundy 数の集合が 0 を含まないからである．

(i.ii) Grundy 数が 0 でないところからは，Grundy 数が 0 のところへ移動することができる．なぜならば，Grundy 数が 0 でないとき，定義 6 により，そこから移動する場所の Grundy 数の集合が 0 を含むからである．

(ii) Grundy 数を計算していくと，図 8 ができる．この図があれば，Queen 問題の必勝法が得られる．もし，Queen が Grundy 数が 0 であるところにあるときは後手必勝である．

例えば先手はどのように動いても，Grundy 数が 0 でないところへしか行くことができない．一方，後手はうまく動くと，Grundy 数が 0 のところへ行くことができる．すると，Grundy 数が 0 の場所で先手の番となる．先手がどのように動いても，必ず Grundy 数が 0 でないところへしか行けない．そして後手の番になる．これを繰り返すと，後手の番のときに $(0,0)$ へ移動することができ，後手が勝つ．

もし，Queen が Grundy 数が 0 でないところにあるときは先手必勝である．例えば先手はうまく動くと，Grundy 数が 0 のところへ行くことができる．一方，後手はどう動いても，Grundy 数が 0 でないところへしか行くことができない．すると，Grundy 数が 0 でない場所で先手の番となる．先手はうまく動くと，必ず Grundy 数が 0 であるところへ行くことができる．これを繰り返すと，先手の番のときに $(0,0)$ へ移動することができ，先手が勝つ．

この Queen 問題は Wythoff's Nim として既に研究されており，$\mathcal{P}$-position (後手必勝手) を求める公式も既に知られている [22, 34, 35]．Grundy 数は図 8 のようになる．$\mathcal{P}$-position (後手必勝手の位置) は，Grundy 数が 0 の場所であり，薄いグレーで示している．

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16
9	9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17
10	10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14

図 8: Queen 問題の Grundy 数の図

例 9

図 8 を作るための Mathematica プログラムは次のように 3 つの段階に分けることができる．このプログラム作成は，活動 3(プログラムの作成) に相当している．

I. Queen の動きに相当する式 (1) を Mathematica のコードで記述したものである．コードを見ると，数学では座標を (x, y) で記述することに対し，Mathematica では $\{x, y\}$ で書くこと，数学で $\{(u, y) : u < x\}$ と表される集合を，Mathematica では $Table[\{u, y\}, \{u, 0, x-1\}]$ と表すというような違いがある．この部分が駒の動きに相当している．そして，Queen を他の駒に変える場合の変更も容易に行うことができる．

II. Grundy 数を計算する部分である．この部分は駒の動きには依存しない．

III. 計算した Grundy 数を図として出力するためのコードである．$\mathcal{P}$-position のところを薄いグレーを配色するようにしている．ここで，図に出ている x,y の表示は Mathematica のグラフィックス機能を使ったので，Mathematica のコードには書いていない．

I.

```
move[z_]:=Block[{x,y},x = z[[1]];y = z[[2]];
Union[Table[{u,y},{u,0,x-1}],Table[{x,v},{v,0,y-1}],
Table[{x-t,y-t},{t,1,Min[x,y]}]]];
```

II.

```
len = 20;
allcases = Flatten[Table[{a,b},{a,0,len},{b,0,len}],1];
Mex[L_]:= Min[Complement[Range[0,Length[L]],L]];
Gr[pos_]:= Gr[pos]= Mex[Map[Gr,move[pos]]];
pposition = Select[allcases, Gr[#] == 0 &];
```

III.

```
pposi = Map[{#[[1]]+2,#[[2]]+2}&,pposition];
ff[x_]:=Which[{x[[1]],x[[2]]}=={-1,-1}, ,x[[2]]==-1,x[[1]],
x[[1]]==-1,x[[2]],1==1,Gr[{x[[1]],x[[2]]}]];
b1 = Table[{t,1},{t,2,len+2}];
b2 = Table[{1,t},{t,2,len+2}];
Grid[Table[ff[{n,m}],{n,-1,len},{m,-1,len}],Frame -> All,
Background -> {None, None,
Join[Table[pposi[[s]] -> Red,{s,1,Length[pposi]}],
Table[b1[[s]] -> GrayLevel[0.75],{s,1,Length[b1]}],
Table[b2[[s]] -> GrayLevel[0.75],{s,1,Length[b2]}]]}]
```

3.1 変形例

活動 2(問題の変形 · 改良) についての例を示す．変形には複数のパターンが考えられる．例えば，プレイする人数を増やす/減らす，駒を変更する，ゲームのルールを変更するなどがある．組合せゲームの観点から見ると，プレイヤの人数を増やすと問題は難しくなる傾向があり，Grundy 数の表をどのように表記するかを考える必要性が生じる．よって，最初は Queen を別の駒に変えたらどうなるかということについて検討を行う．その後，ルールの一部を変えるとどうなるかということについて検討を行う．

実践においては，まず Queen を飛車などの別の駒に変える．ここで，他にも様々な駒があることに気づかせることができれば，その駒の動きを move 関数で表現することにより，Grundy 数の表を計算することができる．よって，Queen 以外に何か適当な駒がないかということを探すことが，最初の方針としてよい方法の 1 つであると考えられる．例えば，チェスや将棋，古典チェスや古典将棋などのゲームに用いられる駒は，研究に用いることができる可能性を有する．実際に違った駒を用いた関連研究も存在する [33].

ここで，問題 1 において，Queen を飛車に変形した問題を示す．下線部は問題文を変更した箇所である．

問題 10 (問題 1 の変形 (1): 飛車問題)
チェス盤の上で <u>将棋の飛車</u> を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．ただし，座標の値が増える方向に進むことは出来ないとする．

この変更だけで，数学的な構造は全く違ったものになる．飛車は以下の図 9 のような動きをする駒である．ただし，座標が増える方向へ動けないために，右と下の方向へは行けない．なお，ここで考えているチェス盤では右方向と下方向へは限りなく広がっているとしているので，チェス盤と考えても将棋盤と考えても変わりはない．よって，チェスで飛車と同じ動きをする Rook を動かすのと同じである．なお，この問題はよく知られている石取りゲームの二山くずしと同値である．なぜならば，飛車は上方向もしくは左方向にしか進むことができず，これは x, y のいずれか一方の座標のみしか減らすことができないことを意味している．この (x, y) を石の個数と考えれば，石取りゲームの二山くずしと数学的に同値であることが把握される．二山くずしは Nim とも呼ばれ，組合せゲームでは非常によく知られた問題の 1 つである [22, 34, 35].

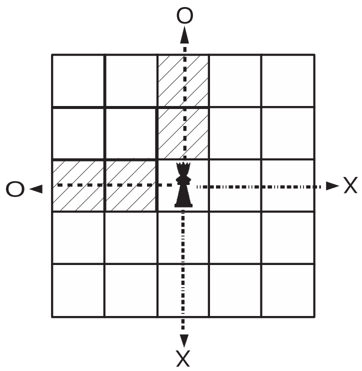

図 9: 飛車 (Rook) の動き

X＼Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0

図 10: 飛車問題の Grundy 数

問題 10 の飛車問題において，飛車の move は式 (2) であり，Grundy 数は図 10 のようになる．

$$\mathrm{move}(x, y) = \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \tag{2}$$

例 9 の I の部分を式 (2) に対応させて書き直すと，I′ のようになる． そして，I′ と例 9 の II と III より，Grundy 数の図 10 を得る．これは活動 4 に対応する．このソースコードの変更は，move 関数の変更のみである．よって，駒の動きに着目し，自身で割り当てた駒の move 関数を記述すればよい．

I′.

```
move[z_]:=Block[{x,y},x = z[[1]];y = z[[2]];
Union[Table[{u,y},{u,0,x-1}],Table[{x,v},{v,0,y-1}]]];
```

次に，ルール変更に着目する．ルール変更にも様々なものがあるが，ここでは例としてパスを一度使えるようにするというルール追加を行う．その問題を記述すると，以下の問題 11 のようになる．

問題 11 (問題 1 の変形 (2))
チェス盤の上で Queen を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイし，1 回だけパスを使えるとして，左上の座標 (0, 0) に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．

ここで述べるパスの定義は以下の通りである．

定義 12 (パスの定義)

- パスは 2 人で合わせて 1 回のみ．
- 駒が (0, 0) にあるときは，パスが使えない．

問題 11 のパス付き Queen 問題において，パスが残っている場合の Grundy 数は図 11 のようになる．

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9
1	2	1	3	0	6	4	8	7	5	9	12
2	1	3	2	6	4	0	7	5	8	12	10
3	4	0	6	3	1	2	9	10	11	13	7
4	3	6	4	1	5	7	10	2	0	14	11
5	6	4	0	2	7	9	11	3	1	5	13
6	5	8	7	9	10	11	4	0	6	3	1
7	8	7	5	10	2	3	0	6	4	11	14
8	7	5	8	11	0	1	6	4	10	16	15
9	10	9	12	13	14	5	3	11	16	7	8
10	9	12	10	7	11	13	1	14	15	8	16

図 11: パス付き Queen 問題の Grundy 数

パスを使い切った場合の Grundy 数は，Queen 問題の Grundy 数の図 8 と同じになる．そして，パス付きの場合の Mathematica プログラムを以下に示す．コマの動きに関しては，I_a, II_a のように 3 変数で座標を $\{x, y, pas\}$ とし，変数 pas は残っているパスの数を表す．III_a の 1 行目で $k = 0$ としてから計算すると図 8 を得ることができ，$k = 1$ としてから計算すると図 11 を得ることができる．

I_a.

```
move[z_]:=Block[{x,y,pas},x=z[[1]];y=z[[2]];pas=z[[3]];
If[z=={0,0,1},{},Union[
Table[{t1,y,pas},{t1,0,x-1}],
Table[{x,t2,pas},{t2,0,y-1}],
Table[{x,y,t3},{t3,0,pas-1}],
Table[{x-tu,y-tu,pas},{tu,1,Min[x,y]}]]]];
```

II_a.

```
len=15;
allcases=Flatten[Table[{a,b,c},{a,0,len},{b,0,len},{c,0,1}],2];
Mex[L_]:=Min[Complement[Range[0,Length[L]],L]];
Gr[pos_]:=Gr[pos]=Mex[Map[Gr,move[pos]]];
pposition=Select[allcases,Gr[#]==0&];
```

III_a.

```
k=0;
pposit[k]=Select[pposition,#[[3]]==k&];
pposi=Map[{#[[1]]+2,#[[2]]+2}&,pposit[k]];
ff2[x_] := Which[{x[[1]],x[[2]]}=={-1,-1},,x[[2]]==-1,x[[1]],
x[[1]]==-1,x[[2]],2==2,Gr[{x[[1]],x[[2]],k}]];
b2=Table[{1,t},{t,2,len+2}];
b3=Table[{t,1},{t,2,len+2}];
Grid[Table[ff2[{n,m}],{n,-1,len},{m,-1,len}],Frame->All,
Background->{None,None,
Join[Table[b3[[s]]->GrayLevel[0.75],{s,1,Length[b3]}],
Table[pposi[[s]]->GrayLevel[0.82],{s,1,Length[pposi]}],
Table[b2[[s]]->GrayLevel[0.75],{s,1,Length[b2]}]]}]
```

パス付き Queen 問題において，パスが残っている場合における Grundy 数が 0 の座標をプロットした図 13 は，パスが残っていない場合 (パスが最初からない場合) における Grundy 数が 0 の座標をプロットした図 12 に一定の乱れを加えたようなものになっていることが読み取れる．

また，他にも別の変形が考えられる．

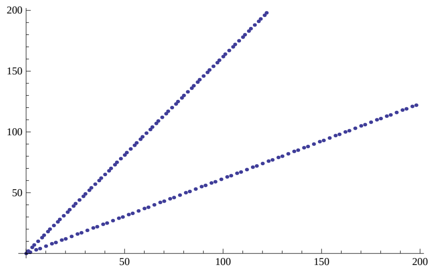

図 12: パスのない Queen 問題の Grundy 数のグラフ

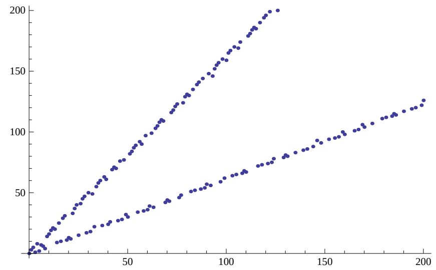

図 13: パス付き Queen 問題の Grundy 数のグラフ

問題 13 (問題 1 の変形 (3))
チェス盤の上で Queen を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0, 0)$ に持って行ったプレイヤーが 負け となる．ただし，座標の値が増える方向に進むことは出来ないとする．

このゲームでは，最後のプレイをした方が負けとなるが，この終了条件は逆形と呼ばれている [22]．一方，今まで扱ってきたゲームは，最後のプレイをした方が勝ちとなる正規形と呼ばれるタイプのゲームである．他にも途中で駒が変わる問題や先手と後手で扱う駒が異なるなど様々な変形が考えられ，今後さらに発展させることが期待できる．

ここでは単純な変形の事例について述べたが，複数箇所を変形することによって，新しい問題を作り出すことも可能である．よって，Queen 問題を変形した問題を用いて研究を行うことで，高校生による数学研究活動を発展させられる可能性を有している．

この問題以外に Grundy 数を用いた事例としては，石取りゲームやチョコレートゲーム [36] などがあり，それらも Queen 問題と同様の活用方法が想定される．また，ゲームの数学的構造は同じであるが，題材が異なることで違った問題変形がなされる可能性も想定されることから，題材によって柔軟に対応することが求められる．

4 実践事例とその結果

第 3 節で開発した題材を用いて，実践を行った．対象者は関西圏にある私立高校の数学系クラブの高校 1 年生から 3 年生の生徒であり，Queen 問題に関してはおおよそ 2 年程度取り組んだ．その中で特に問題発見の部分に焦点を当てながらその事例を紹介し，結果の主要部分について述べる．

4.1 龍王を用いた事例

まず最初に，教員が生徒に Queen 問題を紹介した (活動 1)．そして Grundy 数についての説明，解説を行い，実際に生徒が Grundy 数を求められる状態とした．そして，Mathematica のプログラムを作成させた (活動 3)．ここでは，基本的なプログラムの作成方法を指導し，表を作成する部分については教員側から提供した．

次に，生徒に Queen 問題を変形することを提案した．そこで様々な意見が出たが，駒を飛

車に変えたらどうかという提案が出された．そのことに対し，飛車以外に何か他の駒はないかと発問したところ，将棋の龍王 (成り飛車) を用いるとどうかという提案が出たため，それを研究対象の問題に設定した (活動 2).

問題 14 (問題 1 の変形その 2)
チェス盤の上で 龍王 (成り飛車) を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 (0, 0) の位置に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．ただし，座標の値が増える方向に進むことは出来ないとする．

龍王とは，将棋の飛車が成った駒であり，図 14 のような動き方をする．しかし座標が増える方向へは動けないために，図 14 で × の印がついている方向へ動くことはできない．

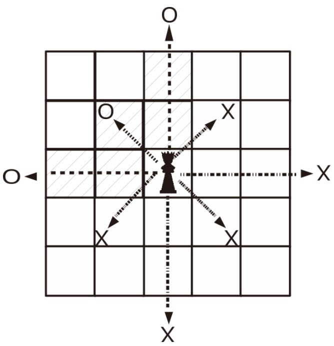

図 14: 龍王の動き

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	6	7	8	15
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	7	8	6	16
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	8	6	7	17
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	18
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	4	5	3	19
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	5	3	4	20
9	9	10	11	6	7	8	3	4	5	0	1	2	21
10	10	11	9	7	8	6	4	5	3	1	2	0	22
11	11	9	10	8	6	7	5	3	4	2	0	1	23
12	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0

図 15: 龍王問題の Grundy 数

龍王の move は式 (3) であり，Grundy 数は図 15 のようになる．

$$\mathrm{move}(x, y) = \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \cup \{(x-1, y-1)\} \tag{3}$$

例 9 の I の部分を式 (3) に合うように書き直す．この活動も生徒に行わせ，move 関数を考えた上でプログラムを変更させた (活動 4).

I_b.

```
move[z_]:=Block[{x,y},x=z[[1]];y=z[[2]];
Union[Table[{t1,y},{t1,0,x-1}],Table[{x,t2},{t2,0,y-1}],
If[Min[x,y]>0,{{x-1,y-1}},{}]]]
```

上の I_b と例 9 の II, III を用いると，Grundy 数の図 15 を得る．この図 15 の中に何か法則や周期性がないか考えさせたところ，3×3 ごとに周期を有しているのではないかと指摘があった．そこで Nim 和 (排他的論理和) を計算して，それとの対応から何か導くことが出来ないかと発問した．しかし龍王の Grundy 数が満たす式は教員側も知らないため，生徒と対等に研究を進めている状況である．そこで，Nim 和を計算する活動の中で，ある生徒が $\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor$

が関係あるのではないかという指摘を行った．その内容を生徒全員と教員が議論を進めることで，龍王の Grundy 数に関し式 (4) のような公式が成立することを明らかにした．この証明に関しては，生徒がメインで行い (活動 6)，それを共同研究者の博士課程後期の学生が発展させた [37]．その後この結果を発展させ [38]，国内および国際学会，数学コンテストでこの結果を発表した (活動 7) [14, 39]．

$$G(x,y) = mod(x+y,3) + 3(\lfloor \frac{x}{3} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{3} \rfloor) \tag{4}$$

ここで，$mod(x+y,3)$ は $x+y$ を 3 で割った余り，$\oplus$ は Nim 和のことである．

4.2 龍馬を用いた事例

上述した龍王に対し，将棋の龍馬ではどうなるかという提案があったため，龍王の研究と同時並行で龍馬 (成り角行) についても研究を進めることとした．活動の流れは龍王を用いた場合と同様である．

問題 15 (問題 **1** の変形その 3)
チェス盤の上で 龍馬 (成り角行) を動かす．2 人のプレイヤーが交互にプレイして，左上の座標 $(0,0)$ に持って行ったプレイヤーが勝ちとなる．ただし，座標の値が増える方向に進むことは出来ないとする．

ここで龍馬とは，将棋の角が成った駒であり，図 16 のような動き方をする．しかし座標が増える方向へは動けないために，図 16 で × の印がついている方向へ動くことはできない．

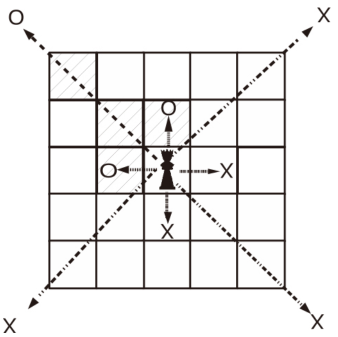

図 16: 龍馬の動き

X\Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
2	0	3	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	1	2	0	3	2	3	2	3	2	3	2
4	0	3	1	2	4	5	4	5	4	5	4
5	1	2	0	3	5	6	7	6	7	6	7
6	0	3	1	2	4	7	5	4	5	4	5
7	1	2	0	3	5	6	4	7	6	7	6
8	0	3	1	2	4	7	5	6	8	9	8
9	1	2	0	3	5	6	4	7	9	10	11
10	0	3	1	2	4	7	5	6	8	11	9

図 17: 龍馬問題の Grundy 数

龍馬の move は式 (5) であり，Grundy 数は図 17 のようになる．

$$move(x,y) = \{(x-1,y)\} \cup \{(x,y-1)\} \cup \{(x-t,y-t) : 0 < t \leq \min(x,y)\} \tag{5}$$

例 9 の I の部分を式 (5) に合うように変更すると，以下の I_c のようになる．そして，I_c と例 9 の II, III より，Grundy 数の図 17 を得ることができる．

I_c.

```
move[z_]:=Block[{x,y},x=z[[1]];y=z[[2]];
Union[Table[{t1,y},{t1,Max[x-1,0],x-1}],
Table[{x,t2},{t2,Max[y-1,0],y-1}],
Table[{x-tu,y-tu},{tu,1,Min[x,y]}]]];
```

この問題に関する公式の発見 · 証明は，1 人の生徒がほとんど行った．そして，その結果を国内学会で報告している [40, 41].

5 考察

実践では，駒の変形以外に様々な提案がなされ，Mathrmatica で move 関数の作成を行った上で，move 関数を自身が置き換えた駒のプログラムに変えていた．そして，いくつかの駒を組合せた動きを持つ駒を用いることや，古典将棋やチェスの変種などから様々な駒を見つけてくるなど，駒の変形だけでも多くの実践が可能であったことから，駒を変えることをまず行わせることは有効であると想定される．

一方，他にも様々な変形が提案された．例えば，複数回のパスが使えるもの，条件によって駒の動きが変化するもの，駒を複数用いたものなどがあったが，生徒にはプログラムとの対応が取りづらいものがあり，数式処理システムのプログラミングスキルによって研究の方向性や得られる結果が異なる．プログラムを教員から提供することも必要ではあるが，教育活動としては，生徒に発見したこととコードが結びつける部分を自身の力で解決させることが重要である．また，組合せゲームの証明を完成させるためには，数学的知識が必要であることから，その調整に関しては教員が行う必要も出てくるが，生徒のアイディアを生かし数学研究を行っていくという観点では，その活動も有効であると想定される．つまり，新しい問題を作り出すこと，ソースコードとの対応を取ること，データから法則や公式を発見する活動は，生徒の数学研究活動の充実化に大きく寄与すると考えられる．

活動の中ではゲーム素材が多く，ゲームに普段から馴染みがある生徒は，教員より早く新しい事実を発見 · 証明することもあり得る．それは大学における研究活動と似ている部分があり，高校においても十分にそれが成立する可能性があることを念頭に置いておく必要があると考えられる．

6 まとめと今後の展望

本稿では，高校生が数式処理システムを用いた数学研究を行うための実践モデルを提案し，そのモデルに基づいた実践事例について報告した．また，それによってどのような成果が得られたかについて紹介し，その有用性を指摘した．高校生が自身で新規性のある問題を発見し解決する活動の具体的な事例を提示できたという点において新規性を示すことができたのではないかと考えられる．しかし，本研究には多くの課題が残されている．

1 点目として，本実践モデルの詳細な検証が必要なことである．数式処理システムを活用するための実践モデルを構築し，それに基づき実践を行ったが，他のモデルとの比較や他の

題材の比較，対象者の校種や学習レベルや内容による相違など，多くの観点において検討の余地が残されている．それらについて 1 つ 1 つ検討を進め，実践モデルの精緻化および再検討を行う必要がある．

2 点目として，生徒の意識や思考の変容，および生徒の成績などとの関連性の検討が必要なことである．本稿に示した活動をさらに多くの現場で実践するためには，活動を通して生徒の意識がどのように変容したのか，モチベーションがどのように変化したのかについて詳細に検討する必要がある．また，数学などの学力との相関も含めて検討することで，数式処理を用いた実践を広める手立てが見いだせる可能性があると想定される．

3 点目として，Mathematica コードの最適化である．Mathematica のコードについては，様々な記述方法がある．よって，生徒にとってどのコードが理解しやすいのかも含めて，今後検討していく必要がある．

4 点目として，様々な数式処理システムによる研究についての検討である．本稿では Mathematica を用いたが，数式処理システムは様々なものがある．この中で Mathematica が他より便利であるとか，そういったことは一義的に主張できない．導入コストや活動の目的なども踏まえ，多角的に検討していく必要がある．

5 点目として，教員のスキルに応じた実践モデルを構築する必要があることである．研究活動の場合，教員の専門分野によっては行えない実践も多く存在する．数式処理やプログラミングなどのスキルに応じた実践モデルを提示することが重要な課題であると考えられる．場合によっては，高大接続など大学と連携した授業や講義の中で用い，オープンエンドで充実した探究学習を実現していくことが重要であると考えられる．また，多くの学校で使える実践モデルとするために必要な要素を明らかにすることも合わせて必要となるのではないかと考えられる．

6 点目として，変形による作問によって，元問題にどのような影響を及ぼすか生徒に考えさせる必要があることである．本稿に示した方法によれば，問題変形した箇所とコードを対応させるため，適当に考えて変形した生徒にはコードを変更できない可能性がある．新しい問題を作るときに，このようにコードとの対応を把握しながら根拠を持って変形していくことは重要であると考えられ，その変形がどのような影響を有するかについて予想させることにより，元問題を詳細に把握することが可能となるのではないかと考えられる．

これらの課題を解決するとともに，さらなる実践事例を蓄積し，そこから多くの現場で活用できる方法について検討していく必要があろう．それらについては今後の課題とする．

謝辞

本研究の一部は，日本学術振興会特別研究員奨励費 18J20759 によって行われたものである．

参 考 文 献

[1] 文部科学省: 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示). 2018.
`http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2019/09/26/1384661_6_1_2.pdf`

[2] 「教授 – 学習過程」. 大村 彰道, 新版 心理学事典, 平凡社, 東京, 1992, 170.

[3] 「発見的学習」. 石田 忠男, 日本大百科全書 (ニッポニカ), 小学館, 東京, **18**, 1994, 809.

[4] J. S. ブルーナー: 教育の過程 (鈴木 祥蔵, 佐藤 三郎 訳) , 岩波書店, 東京, 2014.

[5] 広島県教育委員会: 高等学校「課題発見 · 解決学習」実践事例集, 2018. `https://www.pref.hiroshima.lg.jp/uploaded/attachment/271846.pdf`

[6] 大橋 真也: 新学習指導要領における数学ソフトウェア活用の可能性, 数理解析研究所 講究録, **2067**, 2018, 118–124.

[7] 高橋 正: 数式処理システムの数学教育への応用, 数式処理, **6**(4), 1998, 2–17.

[8] A.H. マズロー: 完全なる人間 (上田 吉一 訳), 誠信書房, 1998.

[9] 恩田 彰: 創造性とはなにか, 医学教育, **13**(3), 1982, 183–186.

[10] 恩田 彰: 創造性開発の研究, 恒星社厚生閣, 東京, 1980.

[11] Miyadera, R.: How High School Students Could Present Original Math Research Using Mathematica, *Proceeding of the international Mathematica symposium*, 2003.

[12] Naito, M., Yamauchi, T., Inoue, T., Tomari, Y., Nishimura, K., Nakaoka, T., Tatsumi, S., Miyadera, R., Ogasa, W. and Minematsu, D.: Discrete Mathematics and Computer Algebra System, *The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009*, **22**, Fukuoka, 2009.

[13] Matsui, H., Yamauchi, T., Tatsumi, S., Inoue, T., Naito, M. and Miyadera, R.: Interesting Variants of the Josephus Problem, 京都大学数理解析研究所 講究録, **1652**, 2009, 44–54.

[14] Nakamura, S., Fukui, M. and Miyadera, R.: High School Mathematics Research Project –Creative Mathematics Education Using Games–, *Journal of Game Amusement Society*, **4**(1), 2015, 21–23.

[15] Miyadera, R. and Nakamura, S.: Impartial Chocolate Bar Games, *Integers*, **15**, 2015, G5.

[16] 宮寺 良平, 福井 昌則: 数学的ゲームを活用した高校生による数学研究, ゲーム学会論文誌, **10**(1), 2018, 13–19.

[17] 藤本 徹, 森田 裕介 (編): ゲームと教育 · 学習 (教育工学選書 II), ミネルヴァ書房, 2017.

[18] 中原 克芳: 中学高校の授業でパズルをどのように活用するか, 大阪商業大学アミューズメント産業研究所紀要, **16**, 2014, 329–339.

[19] 秋山 仁, 中村 義作: ゲームにひそむ数理 –ゲームでみがこう!! 数学的センス, 森北出版, 東京, 1998.

[20] M. ガードナー: ガードナーの数学パズル · ゲーム (完全版 マーティン · ガードナー数学ゲーム全集 1) (岩沢 宏和, 上原 隆平 訳), 日本評論社, 東京, 2015.

[21] M.H. アルバート, R.J. ノワコフスキー, D. ウォルフェ: 組合せゲーム理論入門 –勝利の方程式– (川辺 治之 訳), 共立出版, 東京, 2011.

[22] 佐藤 文広: 石取りゲームの数学 –ゲームと代数の不思議な関係–, 数学書房, 東京, 2013.

[23] D. フォミーン, S. ゲンキン, I. イテンベルク: やわらかな思考を育てる数学問題集 (1) (志賀 浩二, 田中 紀子 訳), 岩波書店, 東京, 2012.

[24] S. ドリチェンコ, ロジカルな思考を育てる数学問題集 (上) (坂井 公 訳), 岩波書店, 東

京, 2014.

[25] S.G. クランツ: 問題解決への数学 (関沢 正躬 訳), 丸善株式会社, 東京, 2001.

[26] 数学セミナー編集部: エレガントな解答をもとむ, 日本評論社, 東京, 2001.

[27] 飯高 茂: 数学の研究をはじめよう (I) 高校生にもできる新しい数学研究へのいざない, 現代数学社, 京都, 2016.

[28] 飯高 茂: 数学の研究をはじめよう (II) 高校生もわかる新しい数論研究への誘い, 現代数学社, 京都, 2016.

[29] G. ポリア: いかにして問題をとくか (柿内 賢信 訳), 丸善, 東京, 1975.

[30] Boden, M.A.: Creativity and Artificial Intelligence, *Artificial Intelligence*, **103**, 1998, 347–356.

[31] Fukui, M., Kashiwagi, M., Miyadera, R., Hagikura, J., Sasaki, Y. and Hirashima, T.: Proposal of Creativity Evaluation Method Using Well-Structured Problems, *International Conference on Computational Creativity 2019*, Charlotte (North Carolina), 2019.

[32] 江川 玫成: クリエイティビティの心理学: 創造的思考の原理 · 方略と 17 のレッスン, 金子書房, 東京, 2013.

[33] Larsson, U. and Wästlund, J.: Maharaja Nim -Wythoff's Queen meets the Knight-, arXiv:1207.0765, 2012. https://arxiv.org/pdf/1207.0765

[34] Bouton, C.L.: Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory, *The Annals of Mathematics*, **3**(1/4), 1901–1902, 35–39.

[35] 一松 信: 石とりゲームの数理 POD 版 (数学ライブラリー 教養篇), 森北出版 (POD 版), 2003.

[36] Robin, A.C.: A Poisoned Chocolate Problem, *The Mathematical Gazette*, **73**(466), 1989, 341–343.

[37] 末續 鴻輝, 福井 昌則: 駒の動きを制限した Wythoff Nim の変種に関する研究, 第 38 回ゲーム情報学研究会 研究報告, 2017–GI–**38**(3), 2017, 1–4.

[38] Miyadera, R., Tokuni, T., Nakaya, Y., Fukui, M., Abuku, T. and Suetsugu, K.: Ryuo Nim: A Variant of the classical game of Wythoff Nim, *arXiv*, https://arxiv.org/abs/1711.01411

[39] 戸國 友貴: 竜王のニム, 2016 年度 算数 · 数学の自由研究 塩野直道賞 (高等学校の部), 2017. http://www.rimse.or.jp/research/past/winner4th.html

[40] 宮寺 良平, 福井 昌則, 戸國 友貴, 萩倉 丈, 森澤 太智, 中屋 悠資, 澤田 健一郎: 数学的ゲームと教育, ゲーム学会「ゲームと教育」研究部会第 9 回研究会, 2015. 香川. http://www.gameamusementsociety.org/article.php?story=GameEdu_151212

[41] 宮寺 良平, 福井 昌則, 戸國 友貴, 中屋 悠資, 森澤 太智, 萩倉 丈, 鹿野 竜也, 星野 壮哉: 数式処理システム Mathematica を活用した数学的ゲームの研究, 日本数式処理学会 Mathematica 分科会教育分科会, 2016. 愛知. http://www.jssac.org/Joint/Conf/pos2016.pdf