

オンラインでの動的な探究学習における 数学ソフトウェア活用について

金子真隆*

東邦大学薬学部

北本卓也†

山口大学教育学部

野田健夫‡

東邦大学理学部

(Received June 17, 2021 Revised November 22, 2021 Accepted January 28, 2022)

概 要

In this paper, we introduce the system to generate HTML5-based mathematical content including figures which can be manipulated dynamically. Using this system, we generate the content for learning the concept of a coefficient of correlation in the field of descriptive statistics. Analyzing the process thorough which several educational researchers modified the content, we considered the influence which the functions of this system had on the strategy to help learners appreciate the targeting concept based on the interlocking network between the symbolic expression and the visual image of it. It can be expected that this workflow will serve as effective tool to promote inquiry-based mathematics education in the era of “ after COVID-19 ” .

1 はじめに

COVID-19 拡大によるオンライン授業の実施が広がる中で、数学の遠隔授業をいかに実施するかということが大きな問題になっている。とりわけ、動的シミュレーションを伴う探究的な学習については問題が大きかったと考えられる。実際、学習者が家庭で所持しているデバイスを利用してもらうという前提に立つと、たとえ無償のものであっても数学ソフトウェアのインストールを求めるのはかなりハードルが高い。また、仮にこのハードルがクリアされたとしても、ソフトウェアに装備される機能が高度であればあるほど、学習者が適切に利用してくれることを期待するのが厳しい状態になる。現実的に、こうしたハードルをクリアするためには、web 上で一通りの活動が完結するフローを考えざるを得ず、web ブラウザベースで動作するシステムの活用が望ましいということになるであろう。本研究では、こうした課題の解決を目指すべく、動的幾何や数式処理の機能を利用できるコンテンツを HTML 形式で作成し、ブラウザ上で学習活動を完結できるシステムを提案し、その利用が教材作成やそれを用いた授業設計にもたらす影響について

*masataka.kaneko@phar.toho-u.ac.jp

†kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

‡noda@c.sci.toho-u.ac.jp

考察する．こうして得られる知見は，COVID-19 が終息した後も，ICT を用いた数学教育に有益な示唆を与えると期待される．

2 教育工学的背景

もとより数学における探究的な学習の進め方については，遠隔授業が広がる以前からすでに様々な課題があって，現状は遠隔授業を余儀なくされている中でそれらがさらに顕在化している状況だと考えられる．とりわけ大きな問題は，探究のテーマとして解決法・解答がどこまで rigid なものを選択するかという点と，学習プロセスを支援するためのシナリオをいかに設計するかという点の 2 つである．

テーマ選択については，初等教育から本稿が主に対象とする大学教養レベルの教育までを通じ，数学以外の教科でいわゆる「正解のない問題」を用いたものも含め，ICT を用いた探究学習が広く行われているのに対し，数学での事例に限られている現状が，多くのメタレビュー研究で指摘されている [1][2]．本来であれば，PC やタブレットの利用は数学との親和性が高く，その技術的進歩に伴って探究学習が広がってしかるべきであったにもかかわらず，世界的にみてもここに大きなギャップが存在するという点である．こうしたギャップの背景としては様々な要素が考えられるが，最大の要因のひとつとして，数学における概念獲得の複雑性があることが指摘できる．先行研究 [3][4] にもある通り，他の教科における概念獲得で一般的に用いられる文字を用いた記述・対話や概念的メタファーとしてのジェスチャーに加え，数学の場合には数式表現やデジタルメディアでの可視化をリソースとし，これらが interlock された形の multi-semiotic な活動によって概念が獲得されていくため，数学としての rigid な論理性を担保しつつ，ICT を用いた探究における「遊び」の要素をいかにブレンドしてテーマを設定するかが難しい．

この困難を制御するためには，教材の構成や学習者に与える足場架けの方略などを含め，ICT を用いて学習プロセスを適切に支援できるようなシナリオが必要である．これは必ずしも高度な計算機能を用いることで学習者の負荷を下げるといった方向性にとどまらず，探究の中であえて学習者に「失敗」を促し，学習目的である概念の必要性・必然性を体感させるなどのアプローチも考えられる．こうしたシナリオの構築に際しては，当然のことながら利用するシステムの特徴が反映され，その影響を解明することは重要な研究課題である．実際先行研究 [5] は，教員が授業の際に利用する教材を継続的に蓄積し，学習活動の中で得られる学習者からのフィードバックによって授業設計がいかに変容したか追跡する研究 (Documentational Approach) を発展させ，デジタルデバイスの利用が授業設計にもたらす影響を追跡するアプローチが提唱されている．本研究では，このアプローチを参考に，提案するシステムが教材作成やシナリオの構築にもたらす影響について考察する．

3 教材作成システムの概要

本論文では HTML5(JavaScript) を活用した教材作成システムを用いている．このシステムは基本的には HTML ファイルと JavaScript のファイルからなっている．その特徴は参考文献 [6]–[8] で述べられているが，ここでは本論文の構成に関わりのある次の特徴について説明する．

(C1) HTML ファイルと JavaScript のライブラリのみを用いて構成されている．

- (C2) HTML5 の技術を活用することによりブラウザ上でボタンをクリックするだけで図、テキストボックスやボタン、文章を整形するためのメニューなどを画面に追加可能であり、それらを用いてブラウザ上で教材作成をすることができる。
- (C3) プログラム部分は JavaScript で書かれており、必要に応じて JavaScript のプログラムを組み込むことができる。
- (C4) 動的幾何ソフト Cinderella[9] で作成した図を組み込むことが可能であり、また CindyScript を用いてその図を操作することができる。
- (C5) ブラウザ上の WSIWYG エディタである Quill(JavaScript のライブラリ、参考文献 [10]) を用いて教材に説明文を入れることが可能である。

3.1 特徴 (C1) について

このシステムは HTML ファイルと JavaScript のライブラリのみを用いて構成されているので、Google Chrome, Firefox や Safari などのモダンなブラウザが動作するパソコン・スマホ・タブレットなどの環境であれば動作する。よって、アプリのインストールを必要とせず、様々なユーザーがすぐに使うことができる。

3.2 特徴 (C2) について

このシステムでは、図 1 の教材作成のためのメニューを準備している。

機能	名前	場所	オプション
radio button 追加		basis の後 ▾	選択肢: A,B,C
textarea 追加	t1	basis の後 ▾	行数: 10 列数: 80
Cinderella 追加	c1	basis の後 ▾	
Quill 追加	q1	basis の後 ▾	
Javascript ボタン追加	j1	basis の後 ▾	label: 実行 行数: 10 列数: 80
表計算追加	s1	basis の後 ▾	label1: 表計算 label2: ダウンロード
ファイル入力追加	i1	basis の後 ▾	入力テキストエリア: init1
削除	test1		

図 1 : 教材作成メニュー

これらはブラウザ上で教材を作成するためのものであり、その機能は以下の通りである。

- radio button 追加 : ブラウザ上にラジオボタンを追加する。選択肢は「選択肢」で指定された項目 (コンマで区切って指定)。
- textarea 追加 : ブラウザ上にテキストエリアを追加する。行数、列数を指定する。
- Cinderella 追加 : ブラウザ上に Cinderella の図を追加する。
- Quill 追加 : ブラウザ上に Quill のメニューを追加する。このメニューを Word のように用いて文章や図、リンク、動画等をブラウザ上に追加する。
- Javascript ボタン追加 : JavaScript の命令を入力するためのテキストエリアと、そこに書かれた命令を実行するためのボタンをブラウザ上に追加する。

- 表計算追加：表計算機能をブラウザに埋め込む．この機能は JavaScript のライブラリーである jspreadSheet の機能を用いて実現されている．
- ファイル入力追加：上の「textarea 追加」で作成したテキストエリアにファイルを読み込むためのボタンをブラウザ上に追加する．
- 削除：上で追加した様々な機能を削除する．機能を追加するときに指定した名前を指定して削除する．

3.3 特徴 (C3) について

図 1 の「Javascript ボタン追加」をクリックすると、図 2 のようにテキストエリアとボタンがブラウザの画面に表示される．

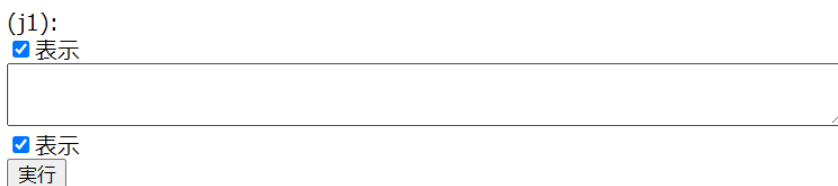


図 2 : 「Javascript ボタン追加」をクリックすると現れるテキストエリアとボタン

テキストエリアに JavaScript のコードを入力して、ボタンをクリックすると、その JavaScript のコードが実行される．この機能を用いることで、システムに任意の JavaScript のコードを組み込むことが可能である．

3.4 特徴 (C4) について

動的幾何ソフトウェアである Cinderella は、作成した図を HTML ファイルの形で保存することができる．この HTML ファイルでは図が JavaScript のライブラリである CindyJS[11] を用いて作成されており、ブラウザ上で点や線を動かすことが可能である．このシステムでは、このようにして HTML ファイルの形で保存された図を教材に取り込むことができる．

また、Cinderella 上で動作するプログラミング言語 CindyScript を用いて、点の操作を行ったり、教材上にある上の「textarea 追加」で作成したテキストエリアに書き込みを行うことができる．後に、この機能を用いて、点の座標のログをテキストエリアに保存する例を示す．

3.5 特徴 (C5) について

図 1 の教材作成メニューの「Quill 追加」のボタンをクリックすると、図 3 のようなメニューがブラウザ上に表示され、これを用いてブラウザ上に文書を入力できる．

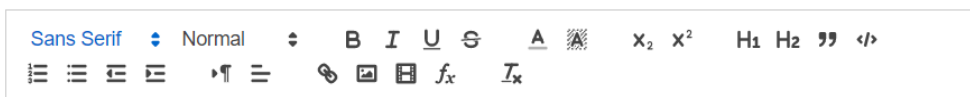


図 3 : 「Quill 追加」をクリックすると現れる Quill の編集メニュー

数式も $\text{T}_\text{E}\text{X}$ の書式を用いて入力可能で、数式表示は KaTeX (JavaScript のライブラリ) を用いて行われる。

3.6 教材の作成例

本研究のシステムを用いて作成した教材例を図4に示す。教材例の図は Cinderella を用いて作成したものを取り込んでおり、図の中の赤色と黄緑色の点を動かすことが可能である。赤色の点を xy 平面上の点としたときの相関係数が図の cor の左側に表示されているが、この値は赤色の点が動くたびに再計算される。図の上の説明は Quill を用いて入力されたものである。数式部分は $\text{T}_\text{E}\text{X}$ の書式で入力されている。

また、図4の画面はテストモード(教材使用者の使うモード)になっており、図4の上にある「編集モードへ行く」をクリックしパスワードを入力すると、編集モード(教材作成者が使うモード)へ移行する。

この教材では、図の中の点を動かした時、その座標がログとして記録される様になっている(このログは学習者の学習過程の解析等に用いる予定である)。そのログの書き込みは Cinderella 上のプログラミング言語である CindyScript で行われている。具体的には、例えば点 A を動かした時に書き込みを行う CindyScript のコードは次のようになっている。

```
if (|A-pa|>eps,updateab();pa=A+[0,0];prob=2;logp("A",A.x,A.y));
```

ここで A は点 A の (x,y) 座標を、A.x, A.y はそれぞれ点 A の x 座標、 y 座標を表している。また、eps は小さい実数を表しており(ここでは 0.01 に設定している)、pa は点 A の前の座標を表している。つまり、上の if の条件は「点 A が前と比べて eps (=0.01) より大きく動けば」という条件となっており、この条件が満たされるとき

```
updateab();
pa=A+[0,0];
prob=2;
logp("A",A.x,A.y);
```

の4つの命令が実行されるというのが上の if 命令の内容である。1行目と3行目にある updateab(); と prob=2; の2つの命令は図4の点 p,q,r の動作に関するものであるが、ここでは説明を省略する。2行目の pa = A + [0,0]; は pa を点 A の新しい座標に設定している。4行目の logp("A",A.x,A.y); は点 A が動いたことをログに書き込む関数である。関数 logp() の定義は次のようになっている、

```
logp(pname,px,py):=(
  printtextarea("log1","Move","+pname+", "+px+", "+py+", "+rat+", "+mx+", "+my+
  ", "+(seconds()*1000)+"\n")
);
```

上の関数定義に出てくる printtextarea(name, str) は name というテキストエリアに文字列 str を書き込む命令である。上の logp() の定義では name が 'log1' に、文字列 str が

ユーザー名 : kita

(q1):

$A = (a_x, a_y), B = (b_x, b_y), C = (c_x, c_y), D = (d_x, d_y)$ に対して

$$m_x = \frac{a_x + b_x + c_x + d_x}{4}, \quad m_y = \frac{a_y + b_y + c_y + d_y}{4}$$

とし

$$v_A = a_x - m_x, v_B = b_x - m_x, v_C = c_x - m_x, v_D = d_x - m_x$$

$$w_A = a_y - m_y, w_B = b_y - m_y, w_C = c_y - m_y, w_D = d_y - m_y$$

とおくとき、相関係数 cor は

$$\frac{v_A w_A + v_B w_B + v_C w_C + v_D w_D}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 + v_D^2} \sqrt{w_A^2 + w_B^2 + w_C^2 + w_D^2}}$$

で定義される。

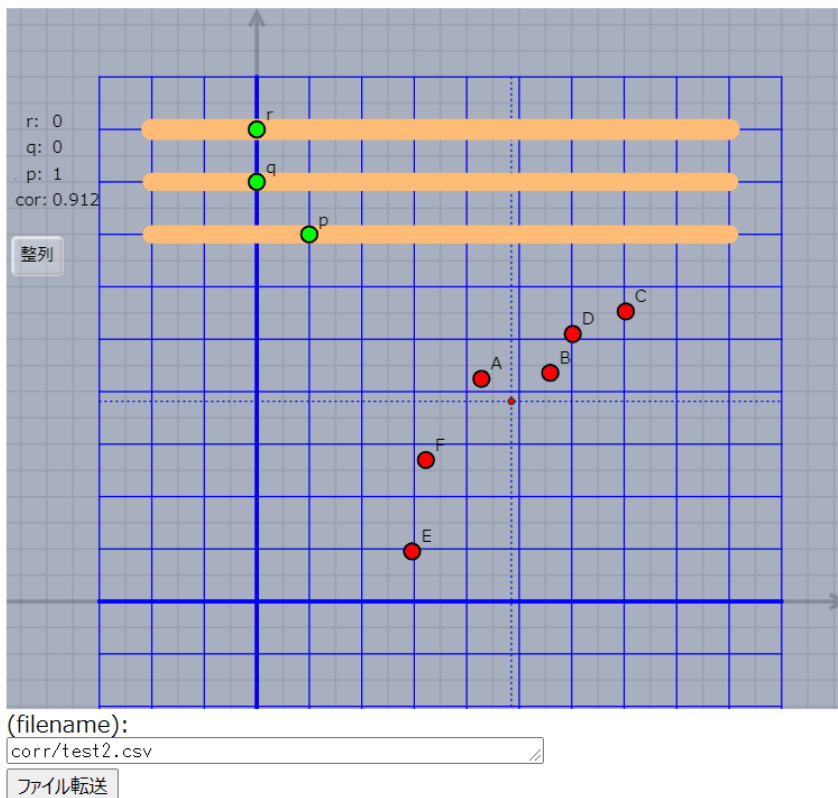


図 4 : このシステムを用いて作成した教材例

```
"Move, "+pname+", "+px+", "+py+", "+rat+", "+mx+", "+my+", "+(seconds()*1000)+"\n")
```

となっている (CindyScript では文字列の連結が + で表されており, 上は 1 つの文字列となる)。上の文字列は点の名前 (変数 pname の値) やその座標 (変数 px, py の値), 赤い点の相関係数 (変数 rat の値), 赤い点の x 座標, y 座標 (それぞれ変数 mx, my の値), 時間 (seconds() は経過時間を秒で表したもの) の情報を含んでいる。

このようにテキストエリアに書き込まれたログは, 図 4 の一番下にある「ファイル転送」のボタンをクリックすると, その上にある (filename:) の欄に書かれた名前ですerverに転送されるようになっている。

4 教材作成事例の分析

前項の教材例でふれた記述統計における相関係数の概念は, ICT の活用により数式表現と視覚的情報とを統合しながら学ぶことが望ましい代表的な事例の一つであろう。実際, 高校の数学 I の教科書には「散布図において, データの分布が直線状に近づくほど相関係数が強く, 直線状ではなく広く散らばるほど相関係数が弱い」という文字情報が提供されるケースが多いが, データの分布全体を相似に縮小した場合や曲線状にデータが分布した場合の相関係数のふるまいを把握するためには, 学習者自身がデータを手で動かして探索する作業が不可欠だと考えられる。こうした背景から筆者は, 2次元のデータの配置を動的に変更した時に相関係数がどのように変化するかシミュレートできる教材を CindyJS を用いて作成し, 大学生に協調学習の設定で操作させる試行を実施している [12]。本研究では, 前節に紹介したシステムを使った場合に, 上記の目的で作成できる教材やそれを用いた授業シナリオがいかに変化するかに追従する。

本来であれば, 教材を作成するたびに授業に投入し, 学習者からのフィードバックを受けての教材・シナリオの変遷を追跡すべきところであるが, 多くの被験者をとれる状況でないことと再試行までに 1 年を要してしまいかねないことに加え¹⁾, COVID-19 拡大の状況下で対話を伴う教育実験に制約がかかっていることから, 本研究では, 著者 3 人がこれまでの教育や教育実験の経験をふまえて教材やシナリオを Zoom ミーティングで検討しあう形をとり, その様子を記録した録画を分析することで擬似的な追跡を実施することとした。

図 5 は, 従来用いていたコンテンツであり, CindyJS 単体で作成したものである。赤いデータ点を学習者自身が手で動かすことができ, データ配置に対応した相関係数が即時に計算され, 画面上に表示されるようになっている。

これを授業で用いる際には, 教授者側で指定したいいくつかの相関係数に対し, それらを実現できるようなデータの配置を探索させて, 得られた結果をスクリーンショットで撮影して報告させるというシナリオを用いていた。このようにすれば, データの動かし方に関する自由度が高く, 学生間で得られた結果を比較しあうことで興味を喚起しうるなどの利点があるものの, 「直線状の配置からのばらつきが大きくなるほど相関係数は 0 に近くなる」というイメージがきちんと把握されるか, 必ずしも保証されないという欠点があった。実際, 試行 [12] の中で, 協調学習の形でこのタスクを学習者 3 名に実行させ, その対話と操作のプロセスを追跡した際に, 開始後

¹⁾ 実際 *documentational approach* では追跡が複数年に及ぶことが普通である。

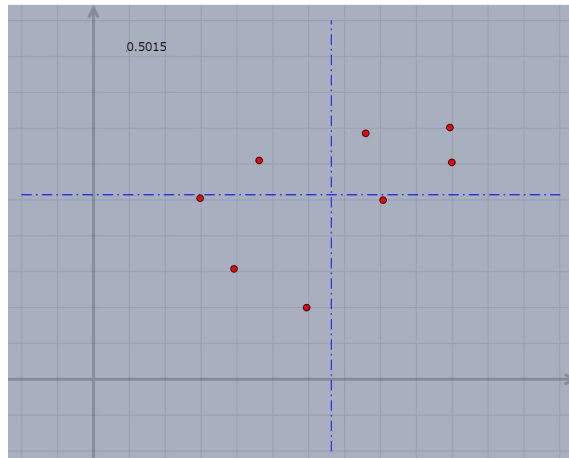


図 5 : CindyJS 単体を用いて作成したコンテンツの操作画面

しばらくの間、上記のポイントがきちんと把握されておらず、ある学生の発話をきっかけにして初めて望ましい探索が開始されるという様子が観察された。また、全体として点の数が少なく、実際のデータを扱う状況とは差異があるとの見方も出た。さらに、1次関数以外の関数のグラフに沿った分布の場合を観察するという意識を学習者が自発的に抱いてくれることを期待するのにも明らかに無理がある。こうした問題を解消するために、前節で紹介したシステムを用いて作成されたのが図 6 のコンテンツである。

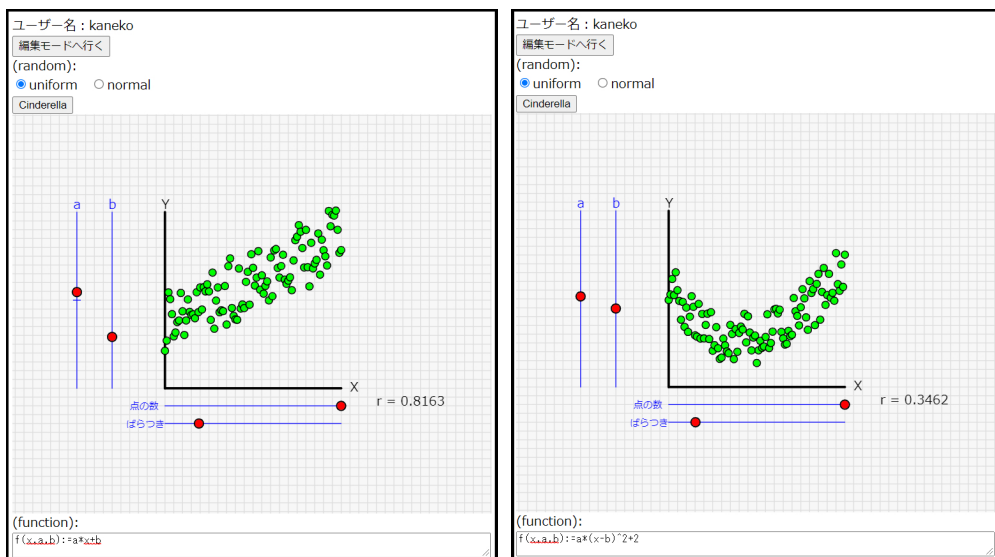


図 6 : 本研究のシステムを用いて作成したコンテンツ

ここでは、図の下側にある“function”という入力窓で関数の形を指定すると、これが自動的に

CindyJS 側に読み取られる上に、図の左側にあるスライダーを操作して、係数 a, b を自由に変更できるようになっている。さらに、図の下側にあるスライダーを操作して点の数を変更することができるのに加え、CindyJS に装備されているランダムデータの発生機能を用いて、データ点を曲線の周囲にランダムに分散させ、その散らばり具合もスライダーで制御できるようになっている。このコンテンツを用いれば、より実際の場面に近い状況で、関数のグラフからのばらつきに焦点化した観察が可能になると期待された。その一方で、データ点の配置傾向を学習者自身が操作できないと、逆に思考の方向性を束縛してしまいかねない上に、実際に操作させるとするとした場合、点の数が多くと相関係数に影響を与えるまでに相当数の操作を行わざるを得ないという問題が認識された。また、分布全体を相似な形で縮小した場合などが扱えないとの問題点も残った。さらに、相関係数の定義に関する数式表現を結び付けて考察を進める場合、点の数が多くと対応関係を理解するのが困難になる上、紙媒体で数式表現に関する情報を与えたのでは、協調学習の際のプラットフォームが散在してしまう危険性も意識された。

以上をふまえ、単一のコンテンツで学習を完結する形を離れ、授業のシナリオとして次のようなステップ分けを伴うものを用意した。

1. 定義式の復習に関する教授者側からの提示

HTML コンテンツ上に表示した相関係数の定義式を復習した上で、データ 6 点のコンテンツを操作し、定義式と結びつける形で相関係数の符号や大小を提示する。

2. 相関係数の性質 (1) 1 次写像での不変性を確認するための操作

6 点コンテンツを操作させ、ある時点で格子点の座標を入力させて相関係数の値を確認させた後、これらの座標を一齐に 1 次写像した値を再度代入したときに、データの配置と相関係数の値がどうなるか観察させる。

3. 相関係数の性質 (2) 2 次関数相関の場合を観察するための操作

2 次関数 $y = a(x - b)^2 + 3$ で支配される分布に従う多数のデータ点をもつコンテンツを操作させ、係数 a, b をスライダーで動かしたときに相関係数がどう変わるか観察させる。

4. 図 5 と同様のデータ 10 点のコンテンツを操作させ、指定された相関係数を実現するデータ配置を探索させる。操作中のログを蓄積し、学習者の操作が相関係数の定義をしっかりと理解した上でのものだったか、事後の検証が可能になるようにする。

このシナリオについて再検討したが、ステップ 2 の座標の手入力については学習者の負担が大きくなりかねない上、点の配置の変化と相関係数の変化との結びつきがとらえにくくなるのではないかとの問題意識が生じた。このため、初期の点の配置を座標の手入力によって指定する形をやめ、手で動かしながら格子点に限らぬ自由な位置に設定可能とし、1 次写像の係数をスライダーで動かせるようにした方が望ましいと判断された。また、ステップ 4 について、ステップ 2 で調べた相関係数の不変性との対比を明確化するために、当初のデータ配置を図 5 のようなランダムなものにせず、座標軸に平行な長方形の格子点上に配置して、相関係数が 0 となる形から出発するようにはどうかとのアイデアも出された。さらにステップ 4 については、相関係数の値を操作中に見せたままにするか否かも議論となったが、ゲーム性を持たせるためには操作終

了後にボタンを押すと表示される形が面白そうだということで、視察での判断がやや難しい相関係数が 0 に近いケースについては相関係数を表示したままの形で操作させた上で、相関係数が 1 に近いケースについては途中で表示しない形で操作させてはどうかということになった。

以上のような検討のもとで、ステップ 2 を実施するために作成されたのが、図 4 に示したコンテンツである。ここで、前半の数式表現の部分については、前節でふれた Quill メニューを利用して追加されている。また、6 点の配置は学習者が自由に変更できるのに加え、1 次写像

$$X = px + q, \quad Y = py + r$$

の係数 p, q, r をスライダーで動かせるようになっている。また、いずれかのデータ点の配置を変更した瞬間に、1 次写像の係数が $p = 1, q = r = 0$ と変更されるようになっており、操作の連続性が確保されるようになっている。さらに、図中の「整列」ボタンを押すと、初期状態として座標軸に平行な長方形の格子点にデータ点が配置され、相関係数 0 の状態が再現できるようになっている。

同様に、ステップ 3 を実施するために作成したコンテンツを図 7 に示す。ここで、データ点を含む曲線を与える 2 次関数 $y = a(x - b)^2 + 3$ の係数 a, b をスライダーで動かせるのと同時に、曲線上の点の位置を自由に動かせるようになっている。実際に操作してみると、曲線上のデータ点の位置や係数 b を動かしたときに相関係数が変化する一方で、これらを固定したまま係数 a を動かしても相関係数が変化しないことが観察される。ステップ 3 では、この事実を学習者自身が見出した上で、その根拠について、直前に与えられた数式表現と対比しながら考察してもらうことを期待している。

さらに、図 8 はステップ 4 を実行するために作成したコンテンツである。ここで、データ点を動かすだけでは相関係数が表示されず、画面上の「相関係数」のボタンを押した場合にのみ、操作中も含めて表示されるようになっている。実現する相関係数としては、 -0.3 と 0.85 を想定したが、データ点の配置を動かしていくプロセスについては、ステップ 3 以前のタスクに対する学習者の理解に応じて様々なケースが想定される。実際、相関係数 -0.3 のケースでは、「整列」ボタンを用いて相関係数 0 の状態にした後、傾きが負の直線の周囲にデータ点が固まる形に動かしていくことが想定されるのに対し、相関係数 0.85 のケースでは、まずデータ点が一直線上に並んだ相関係数 1 の状態にした後、一部の点を直線から少しずつずらしていくことが想定される。しかし、これはあくまで教授者側の想定であって、実際には相関係数 0 のケースで整列ボタンを用いないケースや、直線状にデータ点を並べて相関係数をいったん 1 にしてみる操作を経ないまま操作を完了するケースなどが起こりうる。こうした操作プロセスの実際は、システム上に蓄積される操作ログを抽出して事後に確認することができる。

5 仮説の検証と数式処理システムの活用

本教材では前節に述べた「相関係数の性質 (2)」において、「2 次関数 $y = k(x - l)^2$ 上の点の相関係数を求めたときに、 k の変化に対して相関係数が不変である」ことを図的に理解する (具体的には k の値をスライダーで変化させたときに相関係数が変化しないことを実験を通して観察する) ようになっている。しかしながら、このような図的な理解で得られることはあくまで仮

$A = (a_x, a_y), B = (b_x, b_y), C = (c_x, c_y), D = (d_x, d_y)$ に対して

$$m_x = \frac{a_x + b_x + c_x + d_x}{4}, \quad m_y = \frac{a_y + b_y + c_y + d_y}{4}$$

とし

$$v_A = a_x - m_x, v_B = b_x - m_x, v_C = c_x - m_x, v_D = d_x - m_x$$

$$w_A = a_y - m_y, w_B = b_y - m_y, w_C = c_y - m_y, w_D = d_y - m_y$$

とおくとき、相関係数corは

$$\frac{v_A w_A + v_B w_B + v_C w_C + v_D w_D}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 + v_D^2} \sqrt{w_A^2 + w_B^2 + w_C^2 + w_D^2}}$$

で定義される。

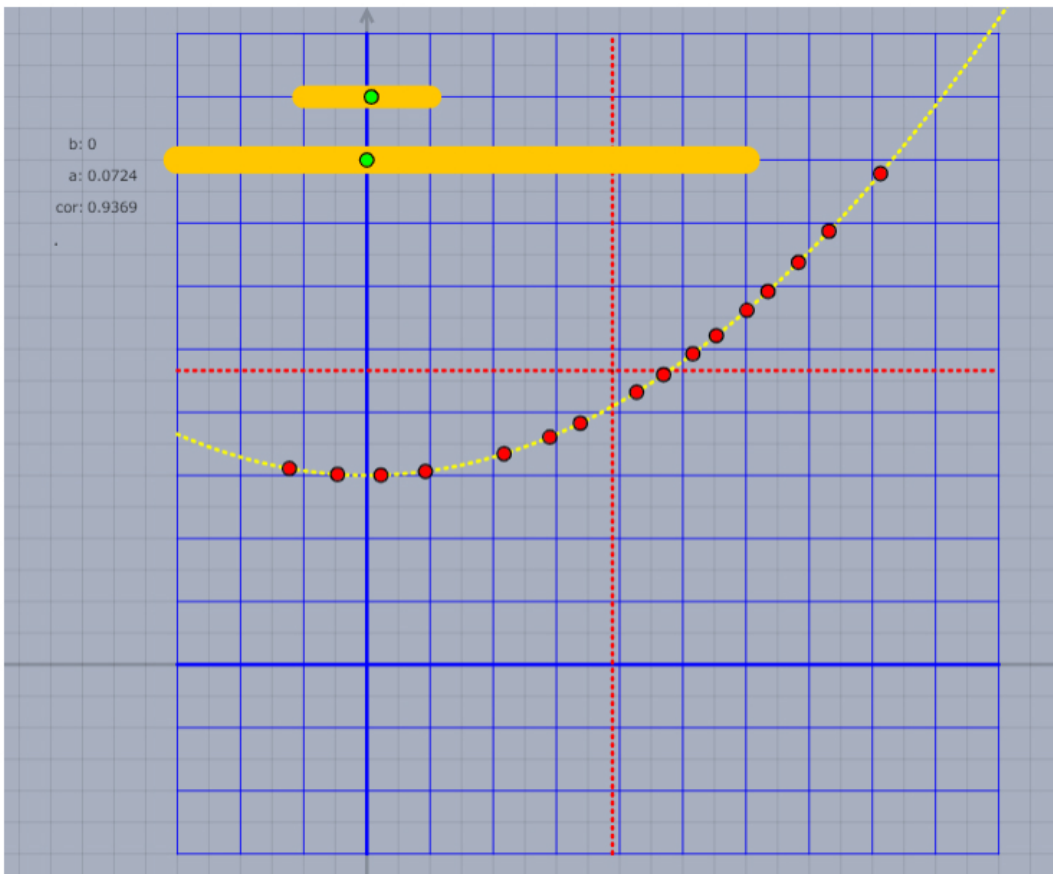


図7：ステップ3を実施するための作成したコンテンツ

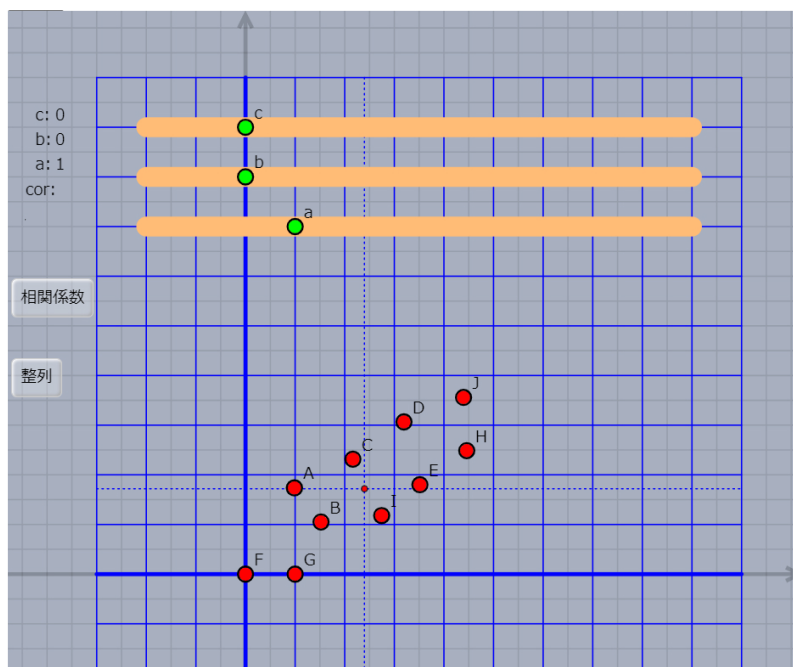


図 8 : ステップ 4 を実施するための作成したコンテンツ

説（予想）であり，事実として認めるには数式変形による厳密な検証が必要であって，上の「相関係数の性質（2）」を数式変形によって確認させることが望ましい．このために，教材の利用者に実際に図 4 の計算式を用いて相関係数を求めさせることを考える．これは 4 つの点からなる簡単な計算例であるが，手で計算を行うのは大変なので数式処理システムに計算させる．実際の計算例が図 9 である（この例では数式処理システムとして *Mathematica* を用いている）．図 9 で計算された相関係数 cor の値を見ると，分子から k ，分母から $|k|$ が括り出せることが見て取れ， k の符号が変わらない限り相関係数が変化しないことが読み取れる．このように数式の計算を行うことで，図を動かしていたときにはあくまで予想であったものが，事実として検証できた．

このような仮説形成と検証の往還は，今後重要性を増してくる探索的な活動の中心的なファクターであるが，実際の計算が複雑になってしまう今回のような場合は，数式処理システムの利用が効果的であると考えられる．

教材の利用者が使える数式処理システムを準備するにはいくつかの方法が考えられる．1 つは Wolfram Cloud ([14]) などのブラウザ上で利用可能なシステムを活用することである．Wolfram Cloud はユーザー登録を行えば誰でも使えるようになるので，利用するまでのハードルは低い（図 9 の計算例も Wolfram Cloud 上で計算したものである）．ブラウザ上で稼働する数式処理システムとしては，Wolfram Cloud 以外にも Jupyter Notebook 上の *sympy* ([15]) などがある．

2 つ目の方法は JavaScript 上で動く数式処理システムを用いることである．このようなシステムの例としては *Algebrite* ([16]) が挙げられる．*Algebrite* は数式処理としての機能は上に挙げ

$$\begin{aligned}
 \text{In[1]} &= \mathbf{a} = \{ax, k * (ax - l)^2\}; \\
 & \mathbf{b} = \{bx, k * (bx - l)^2\}; \\
 & \mathbf{c} = \{cx, k * (cx - l)^2\}; \\
 & \mathbf{d} = \{dx, k * (dx - l)^2\}; \\
 \text{In[2]} &= \{\mathbf{mx}, \mathbf{my}\} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) / 4 \\
 \text{Out[2]} &= \left\{ \frac{1}{4} (ax + bx + cx + dx), \frac{1}{4} (k (ax - l)^2 + k (bx - l)^2 + k (cx - l)^2 + k (dx - l)^2) \right\} \\
 \text{In[3]} &= \mathbf{ones} = \{1, 1, 1, 1\} \\
 \text{Out[3]} &= \{1, 1, 1, 1\} \\
 \text{In[4]} &= \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \text{Transpose}[\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} - \{\mathbf{mx} * \mathbf{ones}, \mathbf{my} * \mathbf{ones}\}] \\
 \text{Out[4]} &= \left\{ \left\{ ax + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx), bx + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx), cx + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx), \right. \right. \\
 & \quad \left. \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) + dx \right\}, \left\{ \frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (ax - l)^2, \right. \\
 & \quad \frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (bx - l)^2, \\
 & \quad \frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (cx - l)^2, \\
 & \quad \left. \left. \frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (dx - l)^2 \right\} \right\} \\
 \text{In[5]} &= \mathbf{cor} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} / (\text{Sqrt}[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] * \text{Sqrt}[\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}]) \\
 \text{Out[5]} &= \left(\left(ax + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) \right) \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (ax - l)^2 \right) + \right. \\
 & \quad \left(bx + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) \right) \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (bx - l)^2 \right) + \\
 & \quad \left(cx + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) \right) \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (cx - l)^2 \right) + \\
 & \quad \left. \left(\frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) + dx \right) \times \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (dx - l)^2 \right) \right) / \\
 & \quad \left(\sqrt{\left(\left(ax + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) \right)^2 + \left(bx + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) \right)^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(cx + \frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) \right)^2 + \left(\frac{1}{4} (-ax - bx - cx - dx) + dx \right)^2 \right)} \right) \\
 & \quad \sqrt{\left(\left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (ax - l)^2 \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (bx - l)^2 \right)^2 + \\
 & \quad \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (cx - l)^2 \right)^2 + \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{1}{4} (-k (ax - l)^2 - k (bx - l)^2 - k (cx - l)^2 - k (dx - l)^2) + k (dx - l)^2 \right)^2 \right)} \right)
 \end{aligned}$$

図9：相関係数の計算 (各点は関数 $y = k(x - l)^2$ 上の点)

た Wolfram Cloud に劣るが、これを使えば教材と同じブラウザ上で数式処理の計算が可能であり (Wolfram Cloud を用いる場合には、別に立ち上げたブラウザ上で動かすことになる)、教材との一体感が出る上、利用者の行動もコントロールしやすくなる。

3 つ目の方法は、計算サーバーを準備し、その上で数式処理システムを動かして、教材と接続して数式計算を行わせることである (このときは、教材上に命令と計算結果を表示するためのテキストエリアを設けることになる)。この場合は、数式処理システムは計算サーバーで動いているので、計算サーバーで動かせる数式処理システムは何でも使うことができる上、教材との一体感もあるが、計算サーバーを必要とし準備に手間がかかる。

上で述べた通り、上の 3 つの方法はどれも一長一短があるので、状況に応じて使い分けるといことが現実的であろう。

6 まとめと今後の課題

前節に見たように、教材やシナリオが変遷する背景としては、システムの要件からくる技術的要素も少なからず存在するが、最大の要因は第 2 節にふれた次のようなディレンマではないかと考えられる。すなわち、学習目的となる概念の理解を優先して自由度を少なくしてしまうと、そもそもなぜ動的なシミュレーションを用いて探究的な学習を行わなくてはならないのかという意味づけが怪しくなる一方で、遊びの要素を過度に取り入れて自由度を高めすぎてしまうと、教授者が期待したような学習行動が発生するか、保証するのが難しくなるという点である。こうした問題について、本研究で提案したシステムは、少なくとも以下の各点で貢献できるものと考えられる。

1. 自由度の高いシミュレーションを行わせる場合でも、同一の画面内に数式表現を伴った理論的な内容を提示しておけることで、学習者は、操作画面から得られる視覚的情報と、その理論的な背景との連関を常に意識しながら学習を進めることができる。
2. 探索のプロセスが教授者の期待する動きとかけ離れていた場合、これを望ましい方向に誘導するための教育的介入を行うためには、画面モニターなどによって学習者の行動を観察しておく必要があり、即時的な介入を行う上での教授者側の負荷が非常に高いのが現実である。本システムにおける操作ログの蓄積機能を用いれば、学習行動を分析する手続きの一部を自動化できるため、即時的な介入の可能性が広がることが期待される。

今後の課題としては、本研究で作成した教材を実際に授業に投入し、学習者からのフィードバックを得ながらさらなる改善を重ね、その状況を追跡していくことと、そこから得られる知見を活かして、他のトピックに関するコンテンツを新たに作成してあげることが挙げられる。筆者のこれまでの先行研究 [13] でも、学習者が事前に身につけている数学的能力によって、タスク実行中の認知的な負荷が変わり、探究的な学習を行った際の状況が大きく変わりうる事例が確認されている。当然、これに応じて教材・シナリオの大幅な変更を迫られる場合も想定され、検証を急ぎたいと考えている。また、新たなコンテンツの作成については、統計分野でも仮説検定などの場面で数式処理システムや統計ソフトとの連携が望ましい場面が少なくなく、近年発達が目覚ましい、JavaScript での該当のライブラリの活用を積極的に検討したいと考えている。

参考文献

- [1] W. H. Wu, Y. C. J. Wu, C. Y. Chen, H. Y. Kao, C. H. Lin : Review of trends from mobile learning studies: A meta-analysis. *Computers and Education*, 59, pp. 817–827, 2012
- [2] H. Crompton, D. Burke : The use of mobile learning in higher education: A systematic review, *Computers and Education*, 123, pp. 53–64, 2018
- [3] G. Lakoff, R. Nuñez : “Where Mathematics Comes From?”, Basic Books, 2001.
- [4] K. L. O’Halloran : “Mathematical Discourse”, Continuum, 2005.
- [5] G. Gueudet, L. Trouche, “Teachers’ Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses”, in *From Text to ‘Lived Resources’*, pp. 23–41, Springer, 2012.
- [6] T. Kitamoto, M. Kaneko, S. Takato : “E-learning system with Computer Algebra based on JavaScript programming language”, *Proc. of ATCM 2018*, pp. 123–133, Yogyakarta, 2018.
- [7] T. Kitamoto, M. Kaneko, S. Takato : “Standalone web application for teachers to create teaching materials on a browser”, *Proc. of ATCM 2020*, Online, 2020.
- [8] 北本卓也, “HTML5 を用いた授業支援ツールについて”, 京都大学数理解析研究所講究録, 2178, pp. 39–47, 2020.
- [9] Cinderella official homepage : URL <https://www.cinderella.de>, (参照 2021-11-15).
- [10] Quill official homepage : URL <https://quilljs.com>, (参照 2021-11-15).
- [11] CindyJS official homepage : URL <https://cindyjs.org>, (参照 2021-11-15).
- [12] 金子真隆, 江木啓訓, 中原敬広, 野田健夫 : “CindyJS によるコンテンツを用いた協調学習における操作と対話との連関の追跡 (III)”, 日本教育工学会 2019 年度秋季全国大会講演論文集, pp. 289–290, 2019.
- [13] 野田健夫, 江木啓訓, 金子真隆 : “動的コンテンツを用いた数学協調学習での認知負荷の様態に関する操作・対話・行動のログを用いた分析の試み”, 日本科学教育学会第 45 回年会講演論文集, pp. 99–102, 2021.
- [14] Wolfram Cloud official homepage : URL <https://www.wolframcloud.com/>, (参照 2021-11-15).
- [15] sympy official homepage : URL <https://www.sympy.org/en/index.html>, (参照 2021-11-15).
- [16] Algebrite official homepage : URL <http://algebrite.org/>, (参照 2021-11-15).