数式処理 *Bulletin of JSSAC(2024)*
Vol. 30, No. 2, pp. 3 - 8

レター

加群のグレブナー基底による隣接作用素の計算

中山 洋将 *

東海大学 理系教育センター

(Received September 14, 2023 Revised December 6, 2023 Accepted March 4, 2024)

概 要

Contiguous relations of hypergeometric functions are important for evaluations of its functions and inducing other formulas. Takayama [3] gave an algorithm to obtain contiguous relations of hypergeometric functions by using Gröbner bases in the ring of differential operators. We present a new algorithm computing contiguous relations by using Gröbner bases in D-modules.

1 Introduction

Gauss 超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ のパラメータ α についての隣接作用素とは,

$$(x\partial+\alpha)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma;x),$$
$$((x^2-x)\partial+\beta x+\alpha-\gamma+1)\cdot F(\alpha+1,\beta,\gamma;x)=(\alpha-\gamma+1)F(\alpha,\beta,\gamma;x),$$

のように，微分作用素でそれを関数に作用させると，関数中のパラメータを 1 増やしたり，パラメータを 1 減らしたりできるものである．ここで，$\partial=\frac{d}{dx}$ (x についての微分作用素) とする．パラメータを 1 増やすものを上昇作用素，パラメータを 1 減らすものを下降作用素と呼ぶ．この場合，上昇作用素は $x\partial+\alpha$，下降作用素は $(x^2-x)\partial+\beta x+\alpha-\gamma+1$ である．上昇作用素は Gauss の超幾何級数の定義式から容易に求めることができるが，下降作用素は上昇作用素に比べるといくらか計算を必要とする．多変数超幾何関数でも，一方の隣接作用素は超幾何級数の定義式から容易に求めることができるが，それとは逆にパラメータを動かす隣接作用素を求めることは難しい場合が多い．[2] では, Appell の 2 変数超幾何関数 F_1 の隣接作用素の計算が説明されている．

既知の隣接作用素から，逆にパラメータを動かす隣接作用素を求める問題について，有理関数係数微分作用素環のグレブナー基底を用いて解くアルゴリズムが，[3] により与えられている．ここでは，隣接関係式を微分作用素環上の加群の元とみなし（例えば上記の隣接関係式であれば $\begin{pmatrix} x\partial+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ のようにみなす)，微分作用素環上の加群のグレブナー基底を用いることで，直接的にこ

*nakayama@tokai-u.jp

の問題を解くアルゴリズムを与える．また得られたグレブナー基底の各元は，隣接するパラメータを持つ関数の間の関係式 (例えば $P \cdot F(\alpha) = Q \cdot F(\alpha+1)$ の形の関係式) を表すことになる．

2　隣接作用素を計算するアルゴリズム

多項式係数微分作用素環を $D = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle$ とする．ここで $\partial_i = \frac{d}{dx_i}$ (x_i についての微分作用素) を表す. 左 D 加群

$$D^2 = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P, Q \in D \right\}$$

を考え，ここにおけるグレブナー基底計算を行うことで，超幾何関数の隣接作用素を計算するアルゴリズムを与える．

$F(\lambda)$ を超幾何関数（多変数でもよい）とし，λ をその関数に含まれるパラメータで隣接作用素により昇降させたいものとする．例えば，Gauss の超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ のパラメータ α についての隣接作用素を対象にする場合は $F(\alpha)$ のように表す．またパラメータの λ は generic にとり, D では定数のように扱う．

$F(\lambda)$ の λ についての上昇作用素 $H(\lambda)$ が得られたと仮定する．すなわち，

$$H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda) F(\lambda+1)$$

が成り立つような $H(\lambda) \in D$ と 0 でない定数 $C(\lambda) \in \mathbb{C}$ が得られたと仮定する．この時，λ についての下降作用素 $B(\lambda+1)$ を求める問題を考える．すなわち，

$$B(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1) = C'(\lambda+1) F(\lambda)$$

が成り立つような $B(\lambda+1) \in D$ と 0 でない定数 $C'(\lambda+1) \in \mathbb{C}$ を求める問題を考える．

D^2 における集合

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \mid P \cdot F(\lambda) = Q \cdot F(\lambda+1) \right\} \subset D^2$$

を考える．これは左 D 加群であることが簡単に示せる．$F(\lambda)$ の零化イデアル (左 D イデアル) を

$$I(\lambda) = \{ P \in D \mid P \cdot F(\lambda) = 0 \}$$

とし，$I(\lambda)$ の生成元を $P_1(\lambda), \ldots, P_r(\lambda)$ とする．

D^2 における左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\lambda+1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ P_r(\lambda+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

を考える．ここで，$\langle Q_1, \ldots, Q_r \rangle$ は $Q_1, \ldots, Q_r \in D^2$ が生成する左 D 加群を表すとする．M の定義から M' の各生成元は M の元になるので，$M' \subset M$ が成り立つ．さらに次が成り立つ．

命題 1

$M = M'$ である．

証明　M の任意の元 $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ をとる．$P \cdot F(\lambda) = Q \cdot F(\lambda+1)$ が成り立つ．$F(\lambda)$ の上昇作用素 $H(\lambda)$ はわかっているので，0 でない定数 $C(\lambda) \in \mathbb{C}$ が存在し，$H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda+1)$ が成り立つ．この 2 つの式から

$$P \cdot F(\lambda) = Q \cdot C(\lambda)^{-1} H(\lambda) \cdot F(\lambda),$$
$$(P - C(\lambda)^{-1} Q H(\lambda)) \cdot F(\lambda) = 0$$

となり，$P - C(\lambda)^{-1} Q H(\lambda) \in I(\lambda)$ がわかる．これより，$Q_1(\lambda), \dots, Q_r(\lambda) \in D$ が存在して，

$$P - C(\lambda)^{-1} Q H(\lambda) = Q_1(\lambda) P_1(\lambda) + \cdots + Q_r(\lambda) P_r(\lambda)$$

が成り立ち，

$$P = C(\lambda)^{-1} Q H(\lambda) + Q_1(\lambda) P_1(\lambda) + \cdots + Q_r(\lambda) P_r(\lambda)$$

と表すことができる．M' の元

$$C(\lambda)^{-1} Q \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix} + Q_1(\lambda) \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + Q_r(\lambda) \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとると，これは

$$\begin{pmatrix} C(\lambda)^{-1} Q H(\lambda) + Q_1(\lambda) P_1(\lambda) + \cdots + Q_r(\lambda) P_r(\lambda) \\ C(\lambda)^{-1} Q C(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

となる．よって $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \in M'$ が成り立つので，$M \subset M'$ が示せた． ∎

下降作用素 $B(\lambda+1)$ が存在するとすれば，$\begin{pmatrix} C'(\lambda+1) \\ B(\lambda+1) \end{pmatrix} \in M'$ ($C'(\lambda+1)$ は 0 でない定数) が成り立つから，M' の元で第 1 成分が 0 でない定数のものをとれば，下降作用素が得られる．

定理 2
左 D 加群 M' の POT 順序 (Position Over Term 順序) $<$ についてのグレブナー基底を G とする．M' の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在するならば，G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在する．

ここで用いている D^2 における POT 順序 $<$ は，D^2 の任意の 2 つの単項式 $x^\alpha \partial^\beta \mathbf{e}_i$ と $x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \mathbf{e}_j$ の間に順序を

$$x^\alpha \partial^\beta \mathbf{e}_i > x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \mathbf{e}_j \iff i < j \text{ または } (i = j \text{ かつ } x^\alpha \partial^\beta >' x^{\alpha'} \partial^{\beta'})$$

と定めるものである．ただし，$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, $i, j \in \{1, 2\}$，$\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ であり, $x^\alpha \partial^\beta$ は $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ の時，$x^\alpha \partial^\beta = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}$ を表す．$<'$ は D における適当な単項式順序, 例えば辞書式順序などとする．$v \in D^2$ について, POT 順序 $<$ についての先頭単項式を $\mathrm{LM}_<(v)$ と表す．加群のグレブナー基底についての記号，用語は [4] に従う．

証明 M' の元 $v = \begin{pmatrix} C \\ Q \end{pmatrix}$ (C は 0 でない定数，$Q \in D$) が存在するとする．v の POT 順序 $<$ についての先頭単項式は $\mathrm{LM}_<(v) = \mathbf{e}_1$ である．G が M' のグレブナー基底であることより，G の元 g で $\mathrm{LM}_<(g)$ が $\mathrm{LM}_<(v)$ を割り切るものが存在する．$\mathrm{LM}_<(v) = \mathbf{e}_1$ であるから，$\mathrm{LM}_<(g) = \mathbf{e}_1$ でなければならない．よって g の第 1 成分は 0 でない定数となる． ∎

ここまでのことから，上昇作用素から下降作用素を計算するアルゴリズムが得られる．

アルゴリズム 3 (下降作用素を計算するアルゴリズム)
入力：$H(\lambda)$: 上昇作用素，$C(\lambda)$: 0 でない定数で $H(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda)F(\lambda+1)$ を満たすもの，$P_1(\lambda), \ldots, P_r(\lambda)$: $F(\lambda)$ の零化イデアルの生成元．
出力：$B(\lambda+1)$: 下降作用素，$C'(\lambda+1)$: 0 でない定数で $B(\lambda+1) \cdot F(\lambda+1) = C'(\lambda+1)F(\lambda)$ を満たすもの．

1. D^2 における左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} H(\lambda) \\ C(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} P_r(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\lambda+1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ P_r(\lambda+1) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   の POT 順序 $<$ (定理 2 で定めたもの) についてのグレブナー基底 G を求める．
2. G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが存在しない場合，下降作用素は存在しない．G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものが $\begin{pmatrix} C'(\lambda+1) \\ B(\lambda+1) \end{pmatrix}$ である．

これとは逆に下降作用素がわかっていて，上昇作用素を求める場合も同様のアルゴリズムを作ることができる．

アルゴリズム 3 の計算例を挙げる．実際にアルゴリズムを実行する場合, 関数 $F(\lambda)$ の零化イデアルを求めることは難しいので，代わりに $F(\lambda)$ を零化する微分作用素を十分多くとり, それらを入力としてアルゴリズムを実行する．下降作用素が見つかる場合は特に問題はない．ただし下降作用素が見つからない場合は，下降作用素が存在しないという保証にはならない．

[3] では, $F(\lambda)$ の零化イデアルが左極大イデアルであれば，上昇作用素，下降作用素は零化イデアルを法として一意に定まることが示されている．$F(\lambda)$ が超幾何関数の場合は，パラメータが特殊な場合を除いて，微分方程式系の既約性から，上昇作用素，下降作用素が (微分方程式系を法として) 一意に定まることが保証されている．

例 4 (Gauss 超幾何関数の例)
$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ を Gauss 超幾何関数とし, α についての上昇作用素から下降作用素を求める．D は 1 変数多項式係数微分作用素環 $D = \mathbb{C}\langle x, \partial \rangle$ とする．$F(\alpha) = F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ とおく．パラメータ α,β,γ は generic であるとする．$F(\alpha)$ を零化する微分作用素として $P(\alpha) = x(1-x)\partial^2 + (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\partial - \alpha\beta$ がとれる．

上昇作用素は簡単な計算から

$$(x\partial + \alpha) \cdot F(\alpha) = \alpha F(\alpha+1)$$

となることが知られている．

左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} x\partial + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P(\alpha+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

をとり，M' の POT 順序 $<$ についてのグレブナー基底 G を計算すると，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (-x^2+x)\partial^2 + ((-\alpha-\beta-2)x+\gamma)\partial - \alpha\beta - \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-\gamma+1 \\ (x^2-x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$$

となる．G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものは $\begin{pmatrix} \alpha-\gamma+1 \\ (x^2-x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$ であるから，

$$(\alpha-\gamma+1)F(\alpha) = ((x^2-x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1) \cdot F(\alpha+1)$$

が成り立ち，下降作用素 $B(\alpha+1) = (x^2-x)\partial + \beta x + \alpha - \gamma + 1$ が得られる．

例 5 (Appell 超幾何関数の例)

$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$ を Appell F_1 の超幾何関数とし，α についての上昇作用素から下降作用素を求める．D は 2 変数多項式係数微分作用素環 $D = \mathbb{C}\langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle$ とする．$F(\alpha) = F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$ とおく．パラメータ $\alpha,\beta,\beta',\gamma$ は generic であるとする．$F(\alpha)$ を零化する微分作用素として

$$\begin{aligned} P_1(\alpha) &= x(1-x)\partial_x^2 + y(1-x)\partial_x\partial_y + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\partial_x - \beta y \partial_y - \alpha\beta, \\ P_2(\alpha) &= y(1-y)\partial_y^2 + x(1-y)\partial_x\partial_y - \beta' x \partial_x + (\gamma - (\alpha+\beta'+1)y)\partial_y - \alpha\beta' \end{aligned}$$

がとれる．

上昇作用素は簡単な計算から

$$(x\partial_x + y\partial_y + \alpha) \cdot F(\alpha) = \alpha F(\alpha+1)$$

となることが知られている．

左 D 加群

$$M' = \left\langle \begin{pmatrix} x\partial_x + y\partial_y + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_2(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_1(\alpha+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ P_2(\alpha+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

をとり，M' の POT 順序 $<$ についてのグレブナー基底 G を計算する．G の元で第 1 成分が 0 でない定数のものは $\begin{pmatrix} \alpha-\gamma+1 \\ (x^2-x)\partial_x + (y^2-y)\partial_y + \beta x + \beta' y + \alpha - \gamma + 1 \end{pmatrix}$ であるから，

$$(\alpha-\gamma+1)F(\alpha) = ((x^2-x)\partial_x + (y^2-y)\partial_y + \beta x + \beta' y + \alpha - \gamma + 1) \cdot F(\alpha+1)$$

が成り立ち，下降作用素 $B(\alpha+1) = (x^2-x)\partial_x + (y^2-y)\partial_y + \beta x + \beta' y + \alpha - \gamma + 1$ が得られる．

参考文献

[1] Erdélyi, A. et al., *Higher Transcendental Functions*, MacGraw-Hill, New York, 1953.

[2] Kimura, T., Hypergeometric fucntions of two variables, Seminar Note Series of Univ. Tokyo, 1972.

[3] Takayama, N., Groebner basis and the problem of contiguous relations, Japan J. Appl. Math. 6, 147–160 (1989).

[4] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., *Using Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1998.